FOREWORD

Convinced of the educational and national value of the use of Indian Languages in Indian Universities, the Academic Council of Nagpur University, on 12th September, 1946, resolved that Hindi and Marathi shall be the media of instruction in the University for the Intermediate courses in Arts and Science from the academic year 1949-50 and for the courses for the B. A. and B. Sc., from the academic year 1951-52. And from the same dates English shall cease to be the medium of instruction in the University.

While co-operating whole-heartedly in the prolonged All-India deliberations for the long-range planning for introduction of Indian languages as media of instruction, Nagpur University has—except as regards postponement of the scheme in respect of the science courses for one year—stuck to its schedule, endeavouring, with all its limitations, to surmount the imme-

diate practical difficulties in carrying through a linguistic transition of this magnitude.

2 These difficulties are, in the main, the three T's of Terms, Text books and Teachers

Thanks to the timely initiative and generous support of its Government, it was possible for the State of Madhya Pradesh to obtain the services of Dr Raghu Vira of the International Academy of Indian Culture of Lahore and to entrust him with the formidable but foundational task of coining and adapting the technical terms of science for the needs of the new linguistic media Dr Raghu Vira, who had already devoted a considerable part of his life to a scientific approach to the problem of technical terms has proceeded to his task on the basic principle of *allied words for allied ideas*, derived from the Sanskrit roots He has reduced the problem of coining terms almost to an art, an art as fine as it is useful.

3 These terms have been coined and adapted in close collaboration with a band of experienced and enthusiastic teachers of science deputed by the State Government at the same time to prepare suitable text books of science

under the general direction and guidance of Dr. Raghu Vira

They have so far prepared fourteen text-books each with a Hindi and a Marathi version dealing with the Intermediate Science courses in Algebra, Trigonometry, Solid Geometry, Co ordinate Geometry, Statics, Dynamics, Physics (Theory), Practical Physics, General and Inorganic Chemistry, Organic Chemistry, Practical Chemistry Zoology, Botany (Theory) and Botany (Practical)

The manuscripts of these text-books, when received from the Government, were referred by the University to its Boards of Studies in the various subjects and, on receipt of their reports, the Academic Council decided, on 8th December, 1949 that, subject to certain specified changes, they be recommended as suitable for the Intermediate Science courses of the University

4 Finally, in accordance with a suggestion of the State Government and with the help of an appropriate Government grant, the University decided in April, 1950, to undertake the publication of these first text books prepared for its courses in science Their printing is now

in progress and seven of these—both Hindi and Marathi versions—which are required for use in the first year of the Intermediate courses are being published today.

5 In the special position occupied by the Universities of the Madhya Pradesh, it has been necessary to publish these books both in Hindi and Marathi This has added to the labour and the cost involved At the same time it has given us a unique advantage we have here an opportunity of piloting an educational experiment in a regional language and at the same time in the language of the Union The inter action of the two parallel series of lectures and text books in the same University—and in many cases in the same college—will, I am confident, prove valuable for the emergence of both Hindi and Marathi as more perfect media of higher education than they can claim to be at present

6 As regards the change of medium for the Intermediate Arts courses, this has already been brought into force from the academic year 1949 50 The proposal for preparation and publication of text books specially designed for

the needs of the University is still under the consideration of the authorities It was, however, thought desirable not to postpone the operation of the scheme in respect of the Arts courses as (i) the number of technical terms required for Arts is much smaller, as compared with those required for Science, and (ii) a certain number of text-books of the Intermediate Arts standard are already available, both for Hindi and Marathi For certain subjects, glossaries of technical terms which will serve the preliminary needs of the teachers and the students have also been prepared by the University Boards of Studies It is further hoped that it would soon be possible to adopt a scheme for preparation of text books for Arts subjects also

7. At the transitional stage, the problem of teachers adequately qualified to give instruction through the Indian languages presents another hurdle For reasons, both historical and geographical, the colleges of Madhya Pradesh have been fortunate in having on their staff teachers who, between themselves, can claim almost all the principal spoken languages of India as their mother-tongues At the present stage,

however, this creates an immediate difficulty in re-organizing the teaching arrangements on the new basis. The University is, however, confident that, where necessary, the teachers will avail themselves of the existing opportunities of acquiring a fairly good knowledge of the language of the Union or a language of their region and that the teachers and the management will, between themselves, so arrange the teaching programmes of colleges that the transition to the new media is made both smooth and effective

No formal test for imparting instruction through the new media has accordingly been prescribed by the University

8 The final shape of the cultural media of the new India will, after all, be moulded by that intellectual commerce between the teacher and the taught which we call University education The scheme of Nagpur University leaves the choice as between the Sanskritic technical terms and their equivalents to the teachers and the students themselves The text-books being published under the scheme give the new Sanskritic technical terms as well as their English equi-

valents and both teachers and students are, at the present stage, permitted to use either of them according to their convenience and requirements. Adoption of this course cuts across the prevailing controversy with regard to the structure of technical terms and, at the same time, gives the newly-coined terms an opportunity to be judged on their own merits along with their English competitors in the academic field.

9. Progress in education requires both individual experiments and general planning, local initiative as well as central direction. It would hardly be proper to be dogmatic about their order of priority and, in the case of a great linguistic transition at the University stage, the problem require to be attacked on all fronts. The Conference of Education Ministers and Vice-Chancellors of India convened by the Ministry of Education in New Delhi in January, 1948, had recommended five years as the time-limit within which Indian Universities should make the requisite preparations for commencing their instruction through the Indian languages. The Indian Universities Commission has, however, wisely left the determination of the duration

of the preparatory period to the interplay of the various educational and social factors that operate in Universities Adoption of such a course would leave each University freedom to regulate the pace of its linguistic progress according to its own needs, resources and limitation

10 Change in the medium of instruction at different dates in different Universities no doubt gives rise to fresh problems Each of these has, however, to be tackled by an intelligent and sympathetic administrative approach One of these difficulties evidently relates to the migration of students from one University to another —a process which, I hope will in the national interests, receive every encouragement in the future The difficulty in this respect however, would not seem to be so formidable as it might appear at first sight, if we remember that (i) English text books in each subject will be recommended along with the Hindi and Marathi text books for use of students (ii) students and teachers will for the present, be familiar both with the Hindi or Marathi terms and with their English equivalents, and (iii) English will continue to be a compulsory subject both for

the Intermediate and for the first degree courses in Arts and Science

The same considerations would seem to apply to the apparent difficulties in respect of All-India Competitive Examinations With the goodwill and determination shown by the builders of the new constitution of India, there is good reason for hoping that English may soon cease to be the sole medium for the All India Competitive Examinations The institution of the language of the Union as the medium of instruction and examination in the Indian Universities should itself accelerate the pace of progress towards this transition

11 I venture to hope that this series of books will prove useful not only for the State of Madhya Pradesh, but also for other States in their efforts to adopt a regional language or the language of the Indian Union as the media of instruction at the University level The present effort is necessarily imperfect We can write good books in Hindi and Marathi only if we can do original thinking in Hindi and Marathi, as we do in English today Yet we can hope to do our thinking in Indian languages only when we have

some written material to stimulate and sustain our thinking in these languages. It is a vicious circle that has to be broken and the present series of books is an organised attempt to break it Deeper thought, practical experience, national planning and local variations will, I have no doubt, change the shape of much of what is written in these text-books. If, however, they serve even as a raw material on which these forces can play to mould them according to our varying requirements, the labour of those who have worked during the last four years for making this new academic venture a success will have been amply rewarded

The J N Tata University
Convocation Hall, Nagpur.
15th August 1950

K. L Dubey
Vice-Chancellor,
Nagpur University.

INTRODUCTION*

"It is India that gave the ingenious method of expressing all numbers by means of ten symbols, each symbol receiving a value of position, as well as an absolute value, a profound and important idea which appears so simple to us now that we ignore its true merit, but its very simplicity, the great ease which it has lent to all computations, puts our arithmetic in the first rank of useful inventions.

"Even though there has been a slow growth of ideas in the history of human civilization, the history of reckoning presents a peculiar picture of desolate stagnation. When viewed in this light, the achievement of the unknown Hindu, who sometime in the first centuries of our era discovered the principle of position, assumes the proportion of a world event.

"The invention of śūnya or zero liberated the human intellect from the prison bars of the Greek counting frame Once there was a sign for the empty column,

* In writing the Introduction in English I have followed the wishes of Lt. Col. Shri K. L. Dubey, the Vice-Chancellor of the Nagpur University. It is hereby intended to introduce the book to such teachers as know neither Hindi nor Marathi.

'carrying over' on slate, paper or other material for writing was just as easy as carrying over on the abacus.

'Āryabhata about A D 470 discusses the rules of arithmetic uses the law of signs of Diophantus, gives a table of sines in intervals of $3\frac{3}{4}$, and evaluates π as 3 1416 **In short, Hindu mathematics starts where Alexandrian mathematics left off** Just a little later, in the sixth century, comes Brahmagupta, who follows the same themes as Āryabhata calculation, series, equations These early Hindu mathematicians had already stated the laws of 'ciphers' or sūnya, on which all our arithmetic depends, namely,

$$a \times 0 = 0$$
$$a + 0 = a$$
$$a - 0 = a$$

Equipped with their simple and eloquent number symbols the Hindus broke away completely from the metaphorical way of dealing with fractions They wrote fractions as we write them and as they had an arithmetic which lent itself to rapid calculation without mechanical aids, they experimented with them as with whole numbers. Thus Mahavira (A D 850) gave our rule for dividing one fraction by another in the same words which a school teacher might use today 'make the denominator the numerator and then multiply

"All the algorithms for fractions now used were invented by the Hindus

* To this is to be added

$$\frac{a}{0} = \infty$$

"Is it not equally strange that algebra that corner stone of modern mathematics also originated in India and about the same time that positional numeration did ?

"The advance from 'rhetorical' discussion of rules for solving problems to symbolism of the modern sort was wellnigh impossible for the Greeks, who had already exhausted the letters of the alphabet for proper numbers. Although the Hindu numerals removed this obstacle to progress, there was at first no social machinery to impose the universal use of devices for representing operators. The only operative symbol which was transmitted to us by the Arabs from Hindu sources is the square root sign ($\sqrt{}$)."

Prof. Lancelot Hogben

उत्पादक यत्प्रवदन्ति बुद्धेरधिष्ठित सत्पुरुषेण साख्या ।
व्यक्तस्य कृत्स्नस्य तदेकबीजमव्यक्तमीश गणित च वन्दे ॥

(Bhaskaracharya, 12th century A D)

Algebra is बीज, बीजक्रिया or बीजगणित, the science of analysis, the operation or computation with 'seeds'. It was also known as कुट्टक-गणित or simply कुट्टक (which dealt particularly with indeterminate equations of the first degree) Another name was अव्यक्त गणित 'calculations with unknowns' as against व्यक्त गणित 'calculation with knowns' used for arithmetic and geometry.

According to our ancients, the values of symbols in arithmetic are व्यक्त that is definitely determinate while in algebra they are अव्यक्त that is indefinite. Bhaskaracharya clearly said that *the science of अव्यक्त गणित is the source of the science of calculation with knowns.*

Ancient Hindu algebra comprised the laws of signs, the arithmetic of zero and infinity, operations with unknowns, surds, indeterminate equations of the first degree and the square nature or the so called Pellian equation. To these may be added concurrence and dissimilar operations.

Algebra began early in India during the Vedic age. The geometrical method of the transformation of a square into a rectangle having a given side is equivalent to the solution of a linear equation in one unknown—

$$ax = c^2$$

Vedic fire altars were constructed in different geometrical designs. One of them was the syena chiti (in the form of a falcon). Its body consisted of four squares, each of its wings a rectangle, and so on. This fire altar was enlarged in two ways—firstly, so that all the constituents were affected in the same proportion, secondly, so that the breadth of a portion of the wings was left unaffected. If x be the unit for enlargement in the first case we shall have to solve the quadratic equation

$$2x \times 2x + 2\left\{x\left(x + \frac{x}{5}\right)\right\} + x\left(x + \frac{x}{10}\right) = 7\frac{1}{2} + m$$

where m denotes the increment of the fire altar in size

Therefore $x^2 = 1 + \frac{2m}{15}$

In particular, when $m=94$, we shall have

$$x^2 = 13\frac{8}{15} = 14 \text{ (approximately)},$$

which occurs in the Satapatha Brahmana

In the second case of enlargement the equation for x will be

$$2x \times 2x + 2\left\{ x\left(x+\frac{1}{5}\right) \right\} + x\left(x+\frac{1}{10}\right) = 7\frac{1}{2} + m$$

$$\text{or } 7x^2 + \frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2} + m$$

which is a complete quadratic equation

The problem of altar construction gave rise also to certain indeterminate equations of the second degree such as,

(1) $x^2 + y^2 = z^2$
(2) $x^2 + a^2 = z^2$

and simultaneous indeterminate equations of the type

$$ax + by + cz + du = p,$$
$$x + y + z + u = q$$

SYMBOLS OF OPERATION—The first syllable of a word, placed before or after the quantity served the purpose of the symbol For addition one of the Sanskrit words is युत It is abbreviated to यु Similarly the ancient Brahmi +, which is a cross, stands as the symbol of subtraction,

being the abbreviation of धय गु abbreviated from गुणन or गुणित stands for multiplication and भा from भाग or भाजित for division. Often these symbols are not used. Juxtaposition serves the purpose. The use of these symbols is best illustrated by the Bakhshali manuscript Bakhshali is a village in the Peshawar district The manuscript lay between stones It was discovered by a farmer who was digging in the mounds in 1881 This is the oldest mathematical manuscript yet discovered It is written in ancient Sarada script of Kashmir on birch bark Its age has been variously estimated some placing it in the second century (in the days of Kanishka), others as late as the twelfth century A D

० / १	५ / १	यु	means $\frac{x}{1}+\frac{5}{1}$

११ / १	यु	५ / १	means $\frac{11}{1}+\frac{5}{1}$

(*folio 59 recto*)

३ ३ ३ ३ ३ ३ ३ १० गु १ १ १ १ १ १ १ १	means $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 10$

(*folio 47 recto*)

० / १ | १ ३ / १ ० | २ ५ / १ २+ || ३ / १ गु ७ / २+ || ४ / १ गु ९ / २+ ||

means

$$x\left(1+\frac{3}{2}\right)+\left\{2x\left(1+\frac{3}{2}\right)-\frac{5x}{2}\right\}$$

$$+\left\{3x\left(1+\frac{3}{2}\right)-\frac{7x}{2}\right\}+\left\{4x\left(1+\frac{3}{2}\right)-\frac{9x}{2}\right\}$$

(*folio* 25 *verso, mutilated*)

१ १ १ १ भा	२६
१+१ १ १	
२ ३ ४+५	१

means $\dfrac{36}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)}$

(*folio* 13 *verso*)

४० भा	१६०	१३
१	१	१
		२

means $\frac{160}{40}\times 13\frac{1}{2}$

(*folio* 42 *recto*)

० ५ यु मू ०	स ० ७ + मू ०
१ १ १	१ १ १

means $\sqrt{x+5}=s$, $\sqrt{x-7}=t$

(*folio* 59 *recto*)

०	२ १	३ ३	१२ ४	दृश्य ३००
१	१ १	१ १	१ १	१

means $x+2x+3\times3x+12\times4x=300$

(*folio* 23 *verso*)

In later times there was a change of plan in the writing of equations. Here are two illustrations, one from Pṛthūdakasvāmī (860 A. D) and the other from Bhāskarāchārya (1150 A. D.)—

(१) या व ० या १० रू १
या व १ या ० रू १

writing x for या

$x^2\ 0 + x\ 10 - 8$

$x^2\ + x \cdot 0 + 1$

or $\quad 0x^2 + 10x - 8 = x^2 + 0\,x + 1$

which means $10x - 8 = x^2 + 1$

(२) या ५   का ८   नी ७   रू १०

या ७   का ९   नी ६   रू ६२

writing x for या, y for का and z for नी

$5x + 8y + 7z + 90 = 7x + 9y + 6z + 62$

Equations were classified as यावद् तावद् (simple), वर्ग (quadratic), घन (cubic) and वर्गवर्ग (bi quadratic) The स्थानांगसूत्र of Jainas (सूत्र ७४७) is sometimes interpreted to refer to these equations Another classification of equations is according to Brahmagupta of 628 A D एकवर्ण समीकरण, अनेकवर्ण-समीकरण and भावित i e equations in one unknown in several unknowns and such as involved products of unknowns एकवर्ण समीकरण is further sub divided into linear equations and quadratic equations अव्यक्तवर्ग समीकरण

It would be interesting to follow the ancient algebraists of India one by one and century to century But it would be outside the scope of this small intro duction Here I shall mention in passing a point or two which are of particular interest for the history of mathe matics In 850 A D Mahavira a Jain author, wrote an epoch making work गणित सारसंग्रह He knew that the quadratic has two roots and he employed the modern rule for finding the root of a quadratic

$$x=\left\{\frac{c/2}{1-a/b}+\sqrt{\left(\frac{c/2}{1-a/b}\right)^2+\frac{d}{1-a/b}}\right\}^2$$

* * *

Algebra is a generalization of arithmetic, for example, the arithmetical facts that $2+2+2=3\times 2$, $4+4+4=3\times 4$, etc., are all special cases of the algebraic statement that $x+x+x=3x$, where x is any number.

Algebra makes use of numbers, letters of the Roman and Greek alphabets and symbols of operation. As compared to biological sciences, the number of technical terms is insignificant.

We are fortunate in possessing a basic terminology for algebra from ancient times. As is clear from a quotation given above, algebra originated in India. As far as the use of the operational symbols, like those for plus, minus, greater than, smaller than, therefore, is concerned the Western symbols have been retained in their entirety. As regards the use of the numerals and letters of the alphabet, we have been able to use our own. It was not possible to use the European numbers and letters in a Hindi or Marathi text-book.

Following the general plan, we have derived our specific algebraic terms from Sanskrit. These terms would be found to be in consonance with the rest of our language. Introducing English terms would have been as awkward as unintelligible. A detailed discussion of the matter will be found in our forthcoming work "The Problems of Indian Scientific Terminology".

The algebraic terminology was worked out in colla boration with Dr Braj Mohan, M A, Ph D, of the Banaras Hindu University Shri N A Shastri, M Sc, (Lond), Asst Prof of Mathematics Mahakoshal Maha vidyalaya Jubbulpore and Shri V M Dabadghao, M Sc, Asstt Professor of Physics Vidarbha Mahavidyalaya, Amraoti Shri Dabadghao is a physicist and his collabo ration was of special value in exploring the use of symbols in physics and mathematics before finally deciding upon the Devanagari letters Shri V M Dabad ghao Shri N A Shastri and a number of their collabo rators worked on the symbols for month on end A com plete list of mathematical symbols in Devanagari has been printed and is available separately English abbreviations have their counterparts in Hindi and Marathi, e g log (logarithm) — घ (घन)

Our rock bottom is formed by ancient words— अंश, numerator, degree अंक digit अन्तर distance अपेक्षित requi red, आदेश substitute, आरोही ascending उपपत्ति proof करणी surd, क्षितिज horizon श्रेढी series, तिर्यग्गुणन cross multipli cation समीकरण equate निर्वचन interpretation निदर्शन illustra tion, बीजगणित algebra, मूल root, radical (the European words are translations from Sanskrit) योग sum, राशि quantity लब्धि quotient, अपवर्त्य multiple, हर denominator सारणी table, etc, etc

Then there are words of common usage—अग्र leading, अचल constant अनियत indefinite अनुसंधान investigation आधार base, आवर्ती recurring उच्चतम highest उन्नयन raising, एकात्म्य identity, चल variable, निश्चायक determinant, नियम

law, पंक्ति row, प्राकृतिक natural, महत्तम greatest, रेखा line, रेखीय linear, लक्षण characteristic, वास्तविक real, विवेचय discriminant, विस्तार expansion, साधारण common, सामान्य general, सीमा limit, etc , etc.

Our ancients used a variety of terms to denote the same idea or the same term to denote various ideas For us it was neither desirable nor possible to use one word for more than one idea or more than one word for the same idea We had to use definite terms so that there be no confusion as to what is meant Thus कर्ण is used for the hypotenuse as well as the diagonal रूप means form, arithmetical unit, integral numbers, known or absolute number, and a known quantity as having specific form Similarly वर्ण appears for the letters of the alphabet for an unknown magnitude or quantity in algebra, for the figure 1 in arithmetic and according to some for a coefficient

For quotient we have भाग, लब्धि, आप्त, आप्ति, अवाप्त अवाप्ति, फल, लब्ध For coefficient we have गुण, अंक प्रकृति वर्ण and यावत् तावत् The coefficient of a root in algebra is मूलगुण Here गुण is an agent noun, meaning a multiplier, equivalent to गुणक For multiplication itself, Sanskrit mathematical literature shows a variety which is unsurpassed—गुणन, गुणता, हनन, हति, हत, अभिहति, वध, वर्गणा, पूरण, अभ्यास, क्षोद, प्रत्युत्पन्न अनुपात stands for proportion, arithmetical progression and rule of three

Our mathematical terminology is not an isolated

list. It is in consonance with the rest of our scientific terminology, in particular with physics.

The specific terms used in algebra are not very many. They are few and simple. Those requiring a word of explanation are listed below.

अनावृत्त — 'nonrecurring' is from आवर्ती 'recurring'. आवर्तन is 'recurrence'.

अनुपाती — 'proportional'. अनुपात 'proportion' is well-known.

अन्यथा — 'aliter.' Aliter is a Latin word meaning otherwise. For the Indian student अन्यथा has its parallel formations in यथा, तथा, etc.

अपवर्त्य — 'multiple' from अपवर्त 'the divisor', अपवर्तक 'the common measure', अपवर्तन 'reduction of a fraction to its lowest term, division without remainder, divisor.' अपवर्त्य is widely used.

असमेय — is a faithful translation of incommensurable, element by element, *in-* अ- + *-com-* -सम- + *mensurare* √मा + *-able* -य.

आदेश — 'substitute' is well-known to students of Sanskrit, e.g. Pāṇini स्थानिवदादेशोऽनल्विधौ.

क्रमचय and संचय for 'permutation' and 'combination' respectively are self explanatory terms and have been used as being clearer and more definite than भावना for combination and व्यतिचार for permutation.

छेदा 'logarithm'. According to नेमिचन्द्र the Jain author of त्रिलोकसार if $x=2^n$ then n is called the अर्धच्छेद of x. छेद is the number of times a particular number can be divided by a base. If $64=4^3$, then 3 represents the number of times that 64 can be divided by 4 Literally छेद is 'cutting' and the number of times that the division can take place is छेदसंख्या or simply छेदा. In $64=4^3$, 3 is the log of 64 to the base 4.

दशमिकांश 'mantissa' The Indian word is crystal clear while the English word is perfectly opaque. In Latin it meant an addition, make weight. The word is believed to be of Etruscan origin This word has gone out of use in general English, where it meant an addition of little value In mathematics it denotes the decimal part of a common logarithm

निष्पत्ति for 'ratio is used not only in Hindi but also in Bengali and elsewhere, e g, in the Modern Anglo Bengali Dictionary by Charu Chandra Guha

प्रति छेदा 'anti logarithm from छेदा 'logarithm'.

प्रतिनिधान to represent प्रतिनिधि for representative is well known

श्रित 'function (for explanation see the Glossary)

मापांक is clearer than English 'modulus' which literally means 'a small measure

time, until it was approved by all of us concerned. The Hindi version was next rendered into Marathi by Kumari A. Date. The two versions were carefully compared by Shri Shastri, Shri Shrivastava and Kumari Date. Finally the book was submitted to the Board of Studies in Mathematics of the University of Nagpur, which while proposing that the book be recommended in the Intermediate Examination in Science of the University made a number of suggestions for improvement, which have been duly incorporated.

* * *

During the course of last three years, I have had the privilege of enjoying the kind sympathy of the Hon'ble Pt. Ravi Shankar Shukla, the Chief Minister of Madhya Pradesh. To the Hon'ble Shri D. K. Mehta, my debt of gratitude is immense. It is he who, as the Finance Minister of the State, set the ball rolling. The Hon'ble Pandit Dwarka Prasad Mishra with his unbounded love for Hindi, has been taking personal interest and has gone so far as to establish a special department for the purpose of establishing Hindi and Marathi as the languages of this State. To Lt. Col. N. Ganguli the Education Secretary in 1947-48 and his successor Dr. V. S. Jha, I am indebted, for giving top priority to my requirements. Since the establishment of the Languages Department in January 1950, Shri A. R. Deshpande, the Under-secretary, has been extending to me his wholehearted cooperation.

My very special thanks are due to Lt. Col. Kunji

Lal Dubey, the Vice Chancellor of the Nagpur University. It is due to his love for Hindi and Marathi that the Nagpur University is leading India in the matter of introducing Hindi and Marathi as the media of instruction It was again due to him that the Nagpur University has taken the heavy responsibility upon itself of publishing the text books that were prepared under the orders of the Government of Madhya Pradesh.

Lastly my thanks are due to my colleagues, the authors of the text-books who have been with me for the last three years. They have worked devotedly, fully convinced of the service that they are rendering to the nation They have considered their work to be their reward.*

Raghu Vira

Hereafter follow three facsimile pages of the Bakhshali manuscript Their contents are transliterated into Devanagari, followed by the same rearranged so as to be better understood, and finally an English translation —Raghu Vira

Bakhshali Manuscript

Folio 13 verso

(*a*) Transliterated from ancient Śāradā into Devanagari

(c) Interpreted

(i) Continued from the obverse

(a) $x^1 = \frac{19\,\text{dro}^\circ + 2\,\text{a}^\circ + 0\,\text{pra}^\circ + 2\,\text{ku}^\circ}{(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{4})} = 10$

(b) $x^1 (1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{4}) = 19\,\text{dro}^\circ + 2\,\text{a}^\circ + 0\,\text{pra}^\circ + 2\,\text{ku}^\circ$ < whence $x^1 = 10$>.

(ii) *Example* The capital of a certain banker is sixty One half of it goes in loss and then he gains by one third next he loses one fourth of it and finally gains one fifth so that he has two gains What is his gain and what is his loss and what the remainder and let that be stated

Solution $60\,(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5}) = 36$

Proofs (a) $x^1 = \frac{36}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5})}$,

whence $x^1 = 60$.

(b) $60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)=36.$

(c) $x^1\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$

$=36 <$ whence $x^1=60>$

Folio 42 recto

(a) Transliterated from ancient Śarada into Devanagari

१ १ २ १ २ | १ ३ | फ ५४ . . . क्रियते। | १ | १ | . . .

सरवासार्धयुक्तेनयोदशसार्धभवनि | ४० मा १ | १६० १ | १३ १ २ | . . .

. . पि एषाच्छेदाकृनाजाता एकेण . . .

. रि सार्धत्रयोदशभिक्रिमिति | १ ? | ४ १ | २७ २ | फ ५४ एषांअप.

. . एकेनलब्धचत्वारिंषड्भि सपद्यनेकथ | १ १

. . ॥ ५६ . . एकोलमति चत्वारिंशत्धरयतुर्किमयेद्

. . . . णि. म्. .

(b) Rearranged

आर्धे युक्ते त्रयोदश सार्धं भवति

| ४० मा° १ | १६० १ | १३ १ २ | . . . . एषा च्छेदां कृता जाता एकेण.

. . . सार्धं त्रयोदशभि किमिति

१	४	२७
१	१	२

फ० ५४ एवं .

. एकेन लभ्य चत्वारिंश् षड्भि संपद्यते कथ

१ . . .	. ४
१	

. . एको लभति चत्वारि सार्धस्य तु किं भवेत् . . . .

(c) Interpreted.

This contains portions of a solution that is not at present, fully understood. The preliminary work is missing and then comes the following proportion $40 : 160 .: 13\frac{1}{2} : 54$, or cancelling by 40 we get $1 : 4 :: \frac{27}{2} : 54$ The next part is missing but apparently was—

$$1 \cdot 4 :: 6 \cdot 24$$
$$1 \quad 4 \cdot : 3 \quad 12$$
$$1 : 4 \cdot\cdot \frac{9}{2} : 18$$

Folio 47 recto

(*a*) Transliterated from ancient Śāradā into Devanagari

. . . . ऋ . . . . . र . . .
विचक्षण· चमूस्तुपृतनास्तिस्रस्तिस्रश्चमू . . . .
नीकीनिदशगुणामाहुरक्षोहनीबुध: ॥ अक्षोहि . . . .

र	१	ए		२	२	२	३	२	२	२	१० गु		गुणितजा
ग	१	ष		१	१	१	१	१	१	१	१		
न	५	प											
तु	३	ति											

धी	रथ	२१८७०	एष अक्षोहि
	गज	२१८७०	प्रमाण ॥ ॥
	नर	१०९३५०	कुमारशाग्रम ।
	हय	६५६१०	. . . ि . . े . .

दा ॥ कश्चिद्राज

(१) (*b*) Rearranged

. . . .
. . . . .विचक्षण:
चमूस्तु पृतना तिस्रस्तिस्रश्च . . . .
अनीकीनि दशगुणां आहुरक्षोहनीबुध ॥
अक्षोहि

र°	१	एष	३	२	३	३	३	३	२	१० गु°
ग°	१	पति	१	१	१	१	१	१	१	१
न°	५									
तु°	३									

गुणिता जाता	रथ	२१८७०
	गज	२१८७०
	नर	१०९३५०
	हय	६५६१०
		(२१८७००)

एष अक्षोहिणी-प्रमाणं ॥

(२) उदा॰ ॥ कश्चिद् राजकुमार शत्रुदम ।

(c) Interpreted

Apparently 3 *chamūs* = 1 *pritanā*

3 *pritanās* = 1 *anīkinī*

10 *anīkinīs* = 1 *akṣauhinī*.

The statement means a *patti* consists of 1 *ratha* + 1 *gaja* + 5 *nara* + 3 *turaga* (i. e., 1 chariot + 1 elephant + 5 foot soldiers + 3 horsemen) and that an *akṣauhinī* contains $3^7.10$ of each of these

$3^7.10$ 1 chariots = 21,870 chariots
$3^7.10$ 1 elephants = 21,870 elephants
$3^7.10.5$ footmen = 109,350 footmen
$3^7.10$ 3 horsemen = 65,610 horsemen
Total 218,700

उपोद्घात

यद्यपि यह मान लिया गया है कि प्रत्येक विद्यार्थी के सर्वांगीण विकास के लिए शिक्षा का माध्यम मातृभाषा होना चाहिए, फिर भी आजतक इस देश में मातृ भाषाओं की सर्वथा उपेक्षा होती रही। इसलिए न तो उनमें आधुनिक वैज्ञानिक विषयों पर ग्रन्थ लिखे गये और न पारिभाषिक शब्द ही थे जिनके आधार पर कोई ग्रन्थ लिखे जाते। ऐसी अवस्था में कार्य के दुस्तर होते हुए भी, हिन्दी को उच्चशिक्षा का माध्यम बनाने के स्तुत्य प्रयास में सहयोग देने की आन्तरिक प्रेरणा के कारण, मैंने हिन्दी में बीजगणित लिखना स्वीकार किया और माध्यमिक परीक्षा के लिए जितने भी उपलब्ध ग्रन्थ थे उनका चयन कर ऐसी सामग्री संकलित की जो सर्वग्राह्य हो सके। पुस्तक की रूपरेखा, उसकी सामग्री और विषय की समुचित अभिव्यक्ति पर पर्याप्त समय व्यतीत करने के उपरान्त मैंने इस पुस्तक को लिखना प्रारंभ किया। इसे सरल और सुपाठ्य बनाने का भरसक प्रयत्न किया गया है। परिभाषाएं सम्पूर्ण विचार को व्यक्त करनेवाली, संक्षिप्त और शीघ्रग्राह्य बनाई गई है। विषय को सरल बनाने के लिए प्रत्येक अध्याय में उदाहरण दिए गए हैं। उच्च गणित में

श्रेढियों के अभिसार और अपसार का विषय महत्वपूर्ण होता है। इस का समावेश प्रस्तुत पुस्तक के क्षेत्र के परे है फिर भी इस का उल्लेख इस प्रकार किया गया है जिससे कि विद्यार्थियों को समझ में सरलता से आ सके। श्रेढियों का अनन्ती तक योग किन दशाओं में किया जा सकता है यह गुणोत्तर श्रेढी के और द्विपद प्रमेय के अध्याय में उदाहरणों सहित समझाया गया है।

अपने पूज्य गुरु तथा महाकोशल महाविद्यालय के अनुभवी प्राध्यापक श्री सी. आ. शास्त्री का मैं कृतज्ञ हूँ। उन्होंने अपना बहुत समय लगाकर इस पुस्तक में उचित संशोधन करने की तथा बहुमूल्य सुझाव देने की कृपा की है।

इस पुस्तक में प्रयुक्त समस्त पारिभाषिक शब्द प्रसिद्ध भाषा शास्त्री, आचार्य डॉ. रघुवीर ने प्रदान किए हैं। यह उनकी सतत सहायता और प्रोत्साहन का ही परिणाम है कि बीजगणित को हिन्दी में प्रस्तुत करने का यह दुस्तर कार्य पूरा हो सका। मैं क्या, सारा देश ही आंगल-भारतीय-महाकोश के लिए उनका ऋणी है।

साथ ही मैं श्री विजयेन्द्र कुमार माथुर एम्.ए. सरस्वती-विहार का भी अनुगृहीत हूं जिन्होंने भाषा को सुबोध तथा परिष्कृत बनाने में मेरी विशेष सहायता की है।

श्री. वी. के. पराडकर एम्. एस् सी का भी मैं अनुगृहीत हूं जिन्होंने विभिन्न परीक्षाओं के प्रश्नपत्रों से अनेक प्रश्न एकत्र कर इस पुस्तक की प्रश्नावलियों के निर्माण में मुझे विशेष सहायता प्रदान की है।

मराठी में इस पुस्तक का सुन्दर अनुवाद कुमारी अहिल्या दाते बी.ए.(आनर्स) ने किया है। इस सत्प्रयास के लिए मैं उन्हें भी धन्यवाद देता हूं।

अयोध्या प्रसाद श्रीवास्तव

विषय-सूची

बीजगणित

अध्याय

बीजगणित

पहला अध्याय

१.१ पदसंहतियों (expressions) का वर्गीकरण (classification) उनके पदों की संख्यानुसार किया जाता है। यदि उनमें पदों की संख्या एक, दो, तीन, या अनेक हो तो उन्हें क्रमशः एकपद (monomial), द्विपद (binonomial), त्रिपद (trinomial) अथवा बहुपद (polynomial) संहतियां कहते हैं।

कय, कय + ख, कय + खर + ग, ...

$कय^{स} + खय^{स-१} + गय^{स-२} + \ldots\ldots + पय + फ$, क्रमशः एकपद, द्विपद, त्रिपद तथा बहुपद संहतियों के उदाहरण हैं।

१.२ चल तथा अचल राशियां (variable and constant quantities)—

उदाहरण—क मूलधन का, भिन्न भिन्न अवधियों के लिए ख प्रतिशत, प्रतिवर्ष ब्याज से, मिश्रधन निकालो।

यदि य से मिश्रधन का अभिधान किया जाय तो य की अर्हाएं (values) ये होंगी—

$य = क + \frac{ख \times क}{१००}$ प्रथम वर्ष के अन्त में

$$य = क + \frac{२ख \times क}{१००} \text{ द्वितीय वर्ष के अन्त में}$$

$$य = क + \frac{३ख \times क}{१००} \text{ तृतीय वर्ष के अन्त में}$$

. . . .

$$य = क + \frac{१४ख \times क}{१००} \text{ चौदहवें वर्ष के अन्त में}$$

उपर्युक्त उदाहरण से यह ज्ञात होता है कि य की अर्हाएं भिन्न भिन्न अवधियों के लिए भिन्न भिन्न हैं, किन्तु क तथा ख की अर्हाएं आदि से अन्त तक वही हैं। अतएव य को चल राशि तथा क, ख को अचल राशियां कहते हैं।

१.२१ य एक चल राशि है, र दूसरी। यदि य और र में इस प्रकार का सम्बन्ध हो कि य की अर्हा दी जाने पर र की अर्हा ज्ञात हो जाय तो र को य का श्रित (function) कहते हैं।

जैसे र=३य+५ में यदि य की अर्हा ज्ञात हो तो र की अर्हा निश्चित हो जाती है। साथ ही र=३य+५ में य कोई भी अर्हा ले सकता है। अतएव य को स्वतन्त्र (independent) तथा र को परतन्त्र (dependent) चल राशि कहते हैं।

संक्षेपार्थ य के श्रित का प्रतिनिधान श्रि(य), श्री(य), श्रा(य) . . .आदि से करते हैं।

१.३ य का परिमेय (rational) पूर्णांक (integral) बीजीय श्रित (algebraic function)—

$$क_० य^{स} + क_१ य^{स-१} + क_२ य^{स-२} + \ldots\ldots क_{स-१} य + क_{स}$$
इस रूप की पदसंहति, जिसमें स धन पूर्णांक है, य के परिमेय पूर्णांक श्रित का उदाहरण है। परिमेय पूर्णांक श्रित की इस परिभाषा में केवल य की ओर संकेत है। $क_०$, $क_१$ ......$क_स$ इन अनेक गुणकों (coefficients) के अपरिमेय (irrational) तथा भिन्नीय (fractional) रहते हुए भी यह पदसंहति य का परिमेय पूर्णांक श्रित है।*

१.४ *जिन बीजीय श्रितों (algebraic functions) में,* चल राशि का उच्चतम घात एक या दो हो, उन्हें क्रमशः य का एकघात तथा द्विघात श्रित कहते हैं। कय+ख, $कय^२ +$ खय+ग, क्रमशः एकघात तथा द्विघात बीजीय श्रित के उदाहरण हैं। जिन पदसंहतियों में चल राशि का उच्चतम घात तीन, चार तथा स हो उन्हें क्रमशः त्रिघात, चतुर्घात,...... तथा स-घात श्रित कहते हैं। अनुच्छेद १.३ में दी गई पदसंहति में चल राशि का उच्चतम घात स होने के कारण वह य का स-घात श्रित है। एकघात तथा द्विघात श्रित कभी कभी क्रमशः रेखीय (linear) तथा वर्गीय (quadratic) श्रित कहलाते हैं।

इसी प्रकार य तथा र इन दो चल राशियों के एकघात तथा द्विघात श्रित के कय+खर+ग, $कय^२ +$ खयर $+ गर^२ +$ घय+चर+ज उदाहरण हैं।

१.५ समानघात श्रित (homogeneous function)—यदि य और र के परिमेय पूर्णांक श्रित में, प्रत्येक पद का

*Burnside and Panton—Vol I

घात एक ही हो तो यह थ्रित य, र का समानघात थ्रित कहलाता है। उदाहरणार्थ $कय + खर$, $कय^{२} + खर^{२} + गयर$, जिनमें क,ख,ग अचल राशियां हैं य तथा र के क्रमशः एक तथा दो घात के समानघात थ्रित हैं।

संमितीय थ्रित (symmetrical function)—यदि दो राशियों के व्यतिहरण से परिमेय पूर्णांक थ्रित में परिवर्तन न हो तो वह उन चल राशियों का संमितीय थ्रित कहलाता है।

यदि थ्रित में दो से अधिक चल राशियां हों तो उनके प्रत्येक युग्म द्वारा उपर्युक्त प्रतिबन्ध का पालन करने पर ही वह थ्रित उन चल राशियों का संमितीय थ्रित होगा, अन्यथा नहीं।

उदाहरणार्थ

$$कय^{४} + खय^{३}र + गय^{२}र^{२} + खयर^{३} + कर^{४}$$

$$क + ख(य^{२} + र^{२} + ल^{२}) + ग(यर + रल + लय)$$

संमितीय थ्रित हैं, पहला य और र का, दूसरा य, र और ल का।

१.६ समीकार (equations)—किसी अव्यक्त की दो पदसंहतियों के समीकरण से समीकार प्राप्त होता है। समीकार में चल तथा अचल राशियां रहती हैं। अव्यक्त (unknown) राशि का उच्चतम घात ही समीकार का घात होता है।

अव्यक्त की जिस अर्हा से समीकार का समाधान होता है उसे उक्त समीकार का मूल (root) कहते हैं। यदि अव्यक्त

की सब अर्हाओं से समीकार का समाधान होता हो तो समीकार को ऐकात्म्य (identity) कहते हैं।

उदाहरणार्थ $\frac{य}{य-क}+\frac{य}{य-ख}+\frac{य}{य-ग}$

$$=\frac{क}{य-क}+\frac{ख}{य-ख}+\frac{ग}{य-ग}+३$$

अव्यक्त य की सब अर्हाओं के लिए सत्य है।

यदि अव्यक्त की केवल विशेष अर्हाओं से ही समीकार का समाधान होता हो तो समीकार को प्रतिबन्धी समीकार (conditional equation) कहते हैं।

उदाहरणार्थ $य^२-५य+६=०$ यह समीकार केवल य=२ तथा ३ के लिये ही सत्य है।

यदि प्रसंग से ऐकात्म्य की ओर अभ्युद्देश (reference) न हो तो साधारणतया समीकार से प्रतिबन्धी समीकार का बोध होता है।

यदि समीकार से ऐकात्म्य का बोध कराना हो तो समता का चिह्न≡ इस प्रकार लिखा जाता है।

१७ तिर्यग् गुणन का नियम (rule of cross multiplication)—मान लो निम्न समीकारों का साधन करना है।

$$क_१य+ख_१र+ग_१=० \qquad (१)$$

$$क_२य+ख_२र+ग_२=० \qquad (२)$$

प्रथम समीकार को $ख_२$ तथा द्वितीय समीकार को $ख_१$ से गुणन करने के पश्चात्, द्वितीय समीकार को प्रथम में से घटाओ।

$\therefore$ य (क$_1$ख$_2$ $-$ ख$_1$क$_2$) + ख$_2$ग$_1$ $-$ ख$_1$ग$_2$ = ०

$$\text{अतः}\quad य = \frac{ख_1ग_2 - ख_2ग_1}{क_1ख_2 - ख_1क_2} \quad \ldots\ldots (३)$$

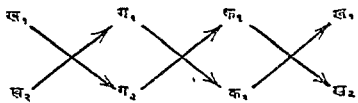
प्रथम समीकार में य की इस अर्हा का आदेश (substitution) करने से

$$र = \frac{ग_1क_2 - क_1ग_2}{क_1ख_2 - ख_1क_2} \quad \ldots (४)$$

(३) तथा (४) को निम्न प्रकार से एक साथ लिखा जा सकता है।

$$\frac{य}{ख_1ग_2 - ख_2ग_1} = \frac{र}{ग_1क_2 - क_1ग_2} = \frac{१}{क_1ख_2 - ख_1क_2} \quad (५)$$

(५) में य, र तथा १ के हरों के रूप देखने से यह प्रतीत होता है कि यदि (१) तथा (२) प्रकार के समीकारों का साधन करना हो तो य, र की अर्हाएं निम्न नियमानुसार सरलता से प्राप्त होती हैं।

दोनों समीकारों में से य, र के गुणकों को तथा अचल पदों को, र के गुणक से आरम्भ कर इस प्रकार लिखो।

शरों द्वारा निर्दिष्ट रीति के अनुसार गुणकों को युग्मों में तिर्यग् रूप से गुणा करो। यदि शर अधोमुख हो तो धन

चिह्न और यदि ऊर्ध्वमुख हो तो ऋण चिह्न रखो।

इस प्रकार ये तीन पदसंहतियां $ख_१ग_२ - ग_१ख_२$, $ग_१क_२ - क_१ग_२$, $क_१ख_२ - ख_१क_२$ प्राप्त होती हैं जो क्रमशः य, र तथा १ की अनुपाती हैं।

अतः

$$\frac{य}{ख_१ग_२ - ग_१ख_२} = \frac{र}{ग_१क_२ - क_१ग_२} = \frac{१}{क_१ख_२ - ख_१क_२}$$

प्रश्नावलि १

इन समीकारों का साधन करो—

(१) ३य − २र − १ = ०
    ५य − ३र − ३ = ०

(२) य + र − १५ = ०
    ४य + ३र − ५२ = ०

(३) २य − ४र + ७ = ०
    ४य + ६र − २१ = ०

(४) ३य + ६र − १० = ०
    २य − र + ५ = ०

दूसरा अध्याय

घातांक नियम
(laws of indices)

२.१ यदि स धन पूर्णांक हो तो $\text{क}^{\text{स}}$ क के सम स खण्डों के गुणनफल का प्रतिनिधान करता है।
अर्थात्

$\text{क}^{\text{स}} = \text{क} \times \text{क} \times \text{क} \times$ स खण्डों तक

$\text{क}^{\text{स}}$ की इस परिभाषा में 'क' को आधार (base) तथा स को आधार क का घात कहते हैं।

उपर्युक्त परिभाषा क आधार पर निम्न नियमों का प्रतिपादन किया गया है। इन्हें घातांक नियम कहते हैं। जब तक अन्यथा न कहा जाय घात स की अर्हा सदैव धन पूर्णांक ली जायगी।

२.२ घातांक नियम—

(१) $\text{क}^{\text{य}} \times \text{क}^{\text{र}} = \text{क}^{\text{य}+\text{र}}$

(२) $\text{क}^{\text{य}} — \text{क}^{\text{र}} = \text{क}^{\text{य}-\text{र}}$ यदि य>र

$= \frac{१}{\text{क}^{\text{र}-\text{य}}}$ यदि य<र

(३) $(\text{क}^{\text{य}})^{\text{र}} = \text{क}^{\text{यर}}$

(४) $(\text{कख})^{\text{य}} = \text{क}^{\text{य}} \times \text{ख}^{\text{य}}$

(५) $\left(\frac{क}{ख}\right)^{य} = \frac{क^{य}}{ख^{य}}$

य तथा र की धन पूर्णांक अहाओं के लिए घातांक नियमों की उपपत्ति (proof) अगले अनुच्छेद में दी गई है।

२३ (१) य तथा र के धन पूर्णांक होने पर

$क^{य} \times क^{र} = क^{य+र}$ का उपपादन करना।

अब $क^{य} = क \times क \times क \times$ य खण्डों तक (परिभाषानुसार)

तथा $क^{र} = क \times क \times क \times$ र खण्डों तक

$\therefore क^{य} \times क^{र} = (क \times क \times क \times \ldots$ य खण्डों तक) (क × क × क . र खण्डों तक)

$= क \times क \times क \times$ (य+र) खण्डों तक

$= क^{य+र}$ (परिभाषानुसार

उपप्रमेय (corollary)—इस फल का निम्न विस्तार किया जा सकता है।

यदि ल भी धन पूर्णांक हो तो

$$क^{य} \times क^{र} \times क^{ल} = क^{य+र} \times क^{ल}$$
$$= क^{य+र+ल}$$

सामान्यतः

$$क^{य} \times क^{र} \times क^{ल} \times क^{व} \times \quad = क^{य+र+ल+व \ldots\ldots}$$

जिसमें य, र, ल, व, .. सब धन पूर्णांक हैं।

(२) य तथा र के धन पूर्णांक होने पर

$$क^{य} - क^{र} = क^{य-र} \quad \text{यदि } य > र$$
$$= \frac{१}{क^{र-य}} \quad \text{यदि } य < र$$

का उपपादन (prove) करना।

(अ) मान लो य>र

$क^य \div क^र = \frac{क^य}{क^र}$

$= \frac{क \times क \times क \times \ldots य \text{ खण्डों तक}}{क \times क \times क \times \quad र \text{ खण्डों तक}}$

(परिभाषानुसार

$= क \times क \times क \times \ldots \ldots (य-र)$ खण्डों तक (अंश तथा हर के उभय-साधारण र खण्डों का लोप करने से)

$= क^{य-र}$ (परिभाषानुसार

(आ) मान लो य <र

$क^य \div क^र = \frac{क \times क \times \ldots\ldots य \text{ खण्डों तक}}{क \times क \times \ldots\ldots र \text{ खण्डों तक}}$

$= \frac{१}{क \times क \times \ldots\ldots (र-य) \text{ खण्डों तक}}$

(अंश तथा हर के उभय-साधारण य खण्डों का लोप करने से)

$= \frac{१}{क^{र-य}}$ (परिभाषानुसार

(३) य तथा र के धन पूर्णांक होने पर

$(क^य)^र = क^{यर}$ इसका उपपादन करना।

$(क^य)^र = (क^य \times क^य \times क^य \ldots र \text{ खण्डों तक})$

$= (क \times क \times \ldots य \text{ खण्डों तक}) (क \times क \times \ldots य \text{ खण्डों तक}) \times$

(क × क × ...य खण्डों तक) × ...ऐसे र अभिवारों (brackets) तक = क × क × क...(य × र) खण्डों तक

$= क^{यर}$ (परिभाषानुसार

उपप्रमेय— $(क^{य})^{र} = (क^{र})^{य} = क^{यर}$

(४) य के धनपूर्णांक होने पर

$(कख)^{य} = क^{य} \times ख^{य}$ इसका उपपादन करना।

$(कख)^{य} = (क \times ख)\ (क \times ख)$...य खण्डों तक

= (क × क × ...य खण्डों तक) (ख × ख × ...य खण्डों तक)

$= क^{य} \times ख^{य}$ (परिभाषानुसार

उपप्रमेय— $(कखग)^{य} = क^{य} \times ख^{य} \times ग^{य}$ तथा

सामान्यतः $(क \times ख \times ग \times घ \times \ldots\ldots\ldots\ldots)^{य}$

$= क^{य} \times ख^{य} \times ग^{य} \times घ^{य} \times \ldots\ldots$

अतः अनेक राशियों के गुणनफल का यवां घात य घाती उन राशियों के गुणनफल के सम होता है।

(५) य के धन पूर्णांक होते हुए

$\left(\frac{क}{ख}\right)^{य} = \frac{क^{य}}{ख^{य}}$ इसका उपपादन

$\left(\frac{क}{ख}\right)^{य} = \left(\frac{क}{ख}\right)\ \left(\frac{क}{ख}\right)$ ....य खण्डों तक

$= \frac{क \times क \times \ldots य\ खण्डों\ तक}{ख \times ख \times \ldots य\ खण्डों\ तक}$

$= \frac{क^{य}}{ख^{य}}$ (परिभाषानुसार

यह नियम इस प्रकार लिखा जा सकता है—दो राशियों की लब्धि का यवां घात इन राशियों के यवें घात की लब्धि है।

निम्न फल का सत्यापन (verification) सरलता से किया जा सकता है

$$\left(\frac{क^{य} \times ख^{र} \times ....}{ग^{ल} \times ...}\right)^{म} = \frac{क^{मय} \times ख^{मर} \times ....}{ग^{मल} \times ....}$$

२.४ धन तथा ऋण राशियों के घात—धन राशियों की संख्या कितनी ही हो उनका गुणनफल सदैव धन रहता है। यदि धन राशि का उन्नयन युग्म (even) या अयुग्म (odd) घात तक किया जाय तो उसकी अर्हा सदैव धन रहती है। किन्तु ऋण राशियों का गुणनफल खण्डों की युग्म अथवा अयुग्म संख्या के अनुसार धन या ऋण रहता है, यह इन उदाहरणों से ज्ञात होगा—

$$(-य)^{२} = (-य)\ (-य) = य^{२}$$
$$(-य)^{३} = (-य)^{२}\ (-य) = य^{२}(-य) = -य^{३}$$
$$(-य)^{४} = (-य)^{२}\ (-य)^{२} = य^{२} \times य^{२} = य^{४}$$

अथवा सामान्यतः

$$(-य)^{२स} = \left[(-य)^{२}\right]^{स} = (य^{२})^{स} = य^{२स}$$
$$(-य)^{२स+१} = (-य)^{२स}(-य) = -य^{२स} \times य = -य^{२स+१}$$

अतः उपर्युक्त आवेदन (statement) सत्य है।

२.५ धन पूर्णांकेतर घात—अनुच्छेद २.१ में दी गई $क^{स}$ की परिभाषा और तदनुसार उपपादित घातांक नियम स, य तथा र की केवल धन पूर्णांक अर्हाओं के लिए ही सत्य हैं। स, य और र की ऋण तथा भिन्नीय (fractional) अर्हाओं के लिए इस परिभाषा का कोई अर्थ नहीं।

जैसे $३^{४}$ में, ४ का खण्डों की संख्या की ओर अभ्युद्देश है। अर्थात् ३ को ४ वार लेना चाहिए। किन्तु इसी परिभाषानुसार यदि यह कहा जाय कि $५^{\frac{१}{३}}$ में ५ को $\frac{१}{३}$ वार लिया गया है अथवा $७^{-४}$ में ७ को (–४) वार लिया गया है तो यह आवेदन निरर्थक होगा।

अब य तथा र की सब अर्हाओं के लिए ऊपर प्रतिपादित घातांक नियमों की सत्यता मान कर अगले अनुच्छेदों में $क^{स}$ का स की भिन्नीय तथा ऋण अर्हाओं के लिए अर्थ दिया जायगा।

२.६ र के घन पूर्णांक होते हुए $क^{\frac{१}{र}}$ का अर्थ निकालना।

$क^{\frac{१}{र}} \times क^{\frac{१}{र}} \times क^{\frac{१}{र}} \times$ र खण्डों तक

$= क^{\frac{१}{र} + \frac{१}{र} + \frac{१}{र} +}$ र पदों तक

$= क^{र \cdot \frac{१}{र}}$ (प्रथम नियमानुसार

$= क$

किन्तु वाम पक्ष $\left(क^{\frac{१}{र}}\right)^{र}$ इस प्रकार लिखा जा सकता है। अर्थात् $\left(क^{\frac{१}{र}}\right)^{र} = क$

अतः $क^{\frac{१}{र}}$ के $र^{वें}$ घात का फल क है।

अतः $क^{\frac{१}{र}}$ क के $र^{वें}$ मूल का प्रतिनिधान करता है।

२.६१ स शून्य होने पर $क^{स}$ का अर्थ निकालना।

द्वितीय घातांक नियम—

$\frac{क^{य}}{क^{र}} = क^{य-र}$ य और र की सब अर्हाओं के लिए सत्य है।

यदि र=य हो तो

$\frac{क^{य}}{क^{य}} = क^{य-य} = क^{०}$

अथवा $१ = क^{०}$

$क^{०} = १$

अतः क की शून्य अर्हा को छोड कर सब अर्हाओं के लिए $क^{०} = १$.

२.६२ स की धन पूर्णांक अर्हा के लिए $क^{-स}$ का अर्थ निकालना।

$$क^{स} \times क^{-स} = क^{स-स} \quad \text{(प्रथम नियमानुसार}$$
$$= क^{०}$$
$$= १$$
$$\text{अतः } क^{-स} = \frac{१}{क^{स}}$$

२.६३ प्रत्येक भिन्न दो पूर्णांकों का भागफल समझा जा सकता है, जिसमें हर को सदैव धन पूर्णांक ले सकते हैं।

अब थ के धन पूर्णांक होने पर $क^{\frac{त}{थ}}$ का जिसमें भिन्न $\frac{त}{थ}$ चाहे धन हो अथवा ऋण, अर्थ निकालना है।

प्रथम नियम के अनुसार

$$क^{\frac{त}{थ}} \times क^{\frac{त}{थ}} \times क^{\frac{त}{थ}} \times \ldots\ldots \text{ थ खण्डों तक}$$

$$= क^{\frac{त}{थ} + \frac{त}{थ} + \frac{त}{थ} + \ldots\ldots \text{थ पदों तक}}$$

$$= क^{थ \times \frac{त}{थ}}$$

$$= क^{त}$$

किन्तु वाम पक्ष $\left(क^{\frac{त}{थ}}\right)^{थ}$ इस प्रकार लिखा जा सकता है।

अतः $\left[क^{\frac{त}{थ}}\right]^{थ} = क^{त}$

अर्थात् $\left(क^{\frac{त}{थ}}\right)$ का थ^वां^ घात $क^{त}$ है।

अतः $क^{\frac{त}{थ}}$, $क^{त}$ का थवां मूल है

पुनः $क^{\frac{त}{थ}}$ को $\left(क^{\frac{1}{थ}}\right)^{त}$ इस प्रकार लिखा जा सकता है क्योंकि तृतीय नियमानुसार

$$\left(क^{\frac{1}{थ}}\right)^{त} = क^{\frac{त}{थ}}$$

इसका यह अर्थ है कि $क^{\frac{त}{थ}}$ यह $क^{\frac{1}{थ}}$ का तवां घात है।

२.७ कुछ उदाहरण—

उदाहरण १— सरल करो—

(अ) $3^{4} \times 3^{7}$ (आ) $\frac{2^{5}}{2^{4}}$ (इ) $(3^{4})^{5}$

(ई) $(3 \times 2)^{5}$ (उ) $\left(\frac{3}{5}\right)^{4}$

(अ) $३^४ \times ३^७ = ३^{४+७} = ३^{११}$

(आ) $\frac{२^५}{२^४} = २^{५-४} = २$

(इ) $(३^२)^५ = ३^{५\times२} = ३^{१०}$

(ई) $(३\times२)^५ = ३^५ \times २^५ = २४३ \times ३२ = ७७७६$

(उ) $(\frac{३}{५})^४ = \frac{३^४}{५^४} = \frac{८१}{६२५}$

उदाहरण २—धन घातांकों में व्यक्त करो—

(अ) $३^{-२} \times ३^{-४} \times ३^३$ (आ) $\frac{४^{-४} \times र^४ \times य^{-३}}{४^{-३} \times र^२ \times य^२}$

(अ) $३^{-२} \times ३^{-४} \times ३^३ = ३^{-२-४+३}$

$$= ३^{-३}$$

$$= \frac{१}{३^३}$$

$$= \frac{१}{२७}$$

(आ) $\frac{४^{-४} \times र^४ \times य^{-३}}{४^{-३} \times र^२ \times य^२}$

$$= \frac{र^{४-२}}{४^{४-३} \times य^{२+३}}$$

$$= \frac{र^२}{४ \times य^५}$$

उदाहरण ३— सरल करो—

$$[\frac{३य^३र^३ल}{य^{\frac{४}{३}} \times र^५}]^{-\frac{२}{३}} \times [\frac{य^५ \times ल_७}{र^{\frac{५}{३}}}]^{-\frac{६}{५}}$$

$$\left[\frac{३य^{३}र^{३}ल}{य^{\frac{४}{३}}\times र^{५}}\right]^{-\frac{२}{३}} \times \left[\frac{य^{५}\times ल^{५}}{र^{\frac{५}{३}}}\right]^{-\frac{१}{५}}$$

$$=\frac{३^{-\frac{२}{३}}\times य^{-२}\times र^{-२}ल^{-\frac{२}{३}}}{य^{-\frac{८}{९}}\times र^{-\frac{१०}{३}}}\times\frac{य^{-१}ल^{-१}}{र^{-\frac{१}{३}}}$$

$$=\frac{१}{३^{\frac{२}{३}}}\times\frac{र^{\frac{१०}{३}+\frac{१}{३}-२}}{य^{२+१-\frac{८}{९}}\times ल^{१+\frac{२}{३}}}$$

$$=\frac{१}{३^{\frac{२}{३}}}\times\frac{र^{\frac{५}{३}}}{य^{\frac{१९}{९}}\times ल^{\frac{५}{३}}}$$

उदाहरण ४— सरल करो—

$$\frac{१}{१+क^{य-र}+क^{य-ल}}+\frac{१}{१+क^{र-ल}+क^{र-य}}+\frac{१}{१+क^{ल-य}+क^{ल-र}}$$

$$पदसंहति = \frac{क^{-य}}{क^{-य}+क^{-र}+क^{-ल}}+\frac{क^{-र}}{क^{-र}+क^{-ल}+क^{-य}}$$

$$+\frac{क^{-ल}}{क^{-ल}+क^{-य}+क^{-र}}$$

$$=\frac{क^{-य}+क^{-र}+क^{-ल}}{क^{-य}+क^{-र}+क^{-ल}}$$

$$=१$$

उदाहरण ५—

$क^{\frac{२}{३}}+क^{\frac{१}{३}}ख^{\frac{१}{३}}+ख^{\frac{२}{३}}$ को $क^{\frac{१}{३}}-ख^{\frac{१}{३}}$ से गुणा करो।

$$
\begin{array}{l}
क^{\frac{२}{३}} + क^{\frac{१}{३}}ख^{\frac{१}{३}} + ख^{\frac{२}{३}} \\
\qquad\qquad क^{\frac{१}{३}} - ख^{\frac{१}{३}} \\
\hline
क + क^{\frac{२}{३}}ख^{\frac{१}{३}} + क^{\frac{१}{३}}ख^{\frac{२}{३}} \\
\quad - क^{\frac{२}{३}}ख^{\frac{१}{३}} - क^{\frac{१}{३}}ख^{\frac{२}{३}} - ख \\
\hline
क \qquad\qquad\qquad\qquad - ख
\end{array}
$$

अतः अपेक्षित गुणनफल (क − ख) के सम है।

प्रश्नावलि २

(१) धन घातांकों में व्यक्त करो—

(अ) $य^{३} \times र^{-४}$ (आ) $य^{-\frac{१}{८}}$ (इ) $र^{-\frac{४}{५}}$

(ई) $\dfrac{य^{\frac{१}{५}} \times र^{-\frac{३}{८}}}{य^{-\frac{२}{५}} \times र^{\frac{५}{८}}}$ (उ) $य^{\frac{२}{३}} \times य^{-\frac{४}{३}}$

(ऊ) $\dfrac{य^{-\frac{१}{८}} \times र^{-\frac{१}{६}}}{य^{\frac{३}{८}} \times र^{\frac{२}{६}}}$

(२) इनकी अर्हाएं निकालो—

(अ) $८^{\frac{१}{३}}$ (आ) $२७^{\frac{१}{४}} \times ३^{-\frac{१}{४}}$ (इ) $\dfrac{१६^{\frac{१}{२}} \times ८१^{-\frac{१}{४}}}{८^{\frac{१}{३}}}$

(ई) $\left(\frac{१२५}{६४}\right)^{-\frac{२}{३}}$

(३) सरल करो— $\frac{य^{०} \times (र \times ल)^{४} (ल^{१})^{३} [य^{१} र^{१} ल]^{४}}{[य^{०} \times र \times ल^{३}]^{४}}$

(४) $[३^{२}]^{२}$ अथवा $३^{२^{२}}$ में कौनसा बड़ा है ?

(५) सरल करो $\frac{३^{३^{२}}}{४(३^{३})^{२}}$

(६) (अ) $य^{\frac{२}{३}} + य^{\frac{१}{३}} + १$ को $य^{\frac{१}{३}} - १$ से गुणा करो।

(आ) $य^{\frac{१}{२}} + य^{\frac{१}{४}} र^{\frac{१}{४}} + र^{\frac{१}{२}}$ को $य^{\frac{१}{४}} - र^{\frac{१}{४}}$ से गुणा करो।

(इ) $(२य + १ + २य^{-१})$ को $(२य - १ + २य^{-१})$ से गुणा करो।

(७) $य^{३} - र^{२}$ का $य^{\frac{१}{२}} - र^{\frac{१}{३}}$ से भाजन करो।

(८) ये पदसंहतियां सरल करो—

(क) $\left[\frac{य^{\frac{३}{४}}}{र^{\frac{५}{३}}}\right]^{३} \left[\frac{र^{\frac{३}{४}}}{ल^{\frac{५}{३}}}\right]^{४} \left[\frac{ल^{\frac{३}{४}}}{य^{\frac{५}{३}}}\right]^{५}$

(ख) $[य^{त} + र^{थ}] [र^{-थ} - य^{-त}]$

(ग) $[य^{\frac{१}{२}} \times र^{\frac{२}{३}}] \times [य^{\frac{१}{३}} \times र^{-\frac{१}{३}}] — य^{\frac{५}{६}} र^{\frac{१}{३}}$

(घ) $[य^{\frac{५}{६}} \times र^{\frac{१}{६}}]^{२} \times \left[\frac{र^{-१} ल^{५}}{य^{\frac{३}{६}}}\right]^{\frac{१}{३}} - य^{\frac{१}{६}} \times ल^{\frac{५}{६}}$

(ङ) $(य)^{ट+ठ} \times \left(\frac{य^{ठ}}{य^{ड}}\right)^{ठ+ड} \times \left(\frac{य^{ड}}{य^{ट}}\right)^{ड+ट}$

[कलकत्ता १९००

(च) $\left[\frac{य^{त}}{य^{थ}}\right]^{त+थ} \div \left[\frac{य^{त+थ}}{य^{त-थ}}\right]^{\frac{त}{थ}}$ [कलकत्ता १९०२

(छ) $\left[\frac{य^{ट}}{य^{ठ}}\right]^{ट} \times \left[\frac{य^{ठ}}{य^{ट}}\right]^{ठ} \div \left[(य^{ट})^{ट} (य^{ठ})^{ठ}\right] \times$

$\left[(य^{ट})^{ठ} (य^{ठ})^{ट}\right]$ [कलकत्ता १९०३

(ज) $\left[\frac{य^{ड}}{य^{ट}}\right]^{ड^2+ड\times ट+ट^2} \times \left[\frac{य^{ट}}{य^{ठ}}\right]^{ट^2+टठ+ठ^2} \times$

$\left[\frac{य^{ठ}}{य^{ड}}\right]^{ठ^2+ठ\times ड+ड^2}$ [कलकत्ता १९०४

(९) यदि $र = य + य^{-1}$ हो तो
(क) $य^2 + य^{-2}$ (ख) $य^3 + य^{-3}$ (ग) $य^4 + य^{-4}$
इन्हें र के पदों में व्यक्त करो।

(१०) यदि $क^{\frac{1}{3}} + ख^{\frac{1}{3}} + ग^{\frac{1}{3}} = ०$ हो तो सिद्ध करो कि
$[क + ख + ग]^3 = २७ \times क \times ख \times ग$

(११) यह दिखाओ कि समीकार $य^{\frac{1}{2}} + र^{\frac{1}{2}} + ल^{\frac{1}{2}} = ०$ परिमेयकरण से [अर्थात् भिन्नीय घातांक न रहे इसलिए जितना बार आवश्यक हो उतनी बार पक्षान्तरण तथा वर्ग करने से]
$[य^2 + र^2 + ल^2 - २रल - २लय - २यर]^2$
$= १२८\ यरल\ (य + र + ल)$
में परिवर्तित होता है।

(१२) यदि $क^{य} = ख$, $ख^{र} = ग$ तथा $ग^{ल} = क$ तो सिद्ध करो

कि यरल = १

(१३) यदि $\text{क}^{\text{य}} = \text{ठ}$, $\text{क}^{\text{र}} = \text{ट}$ तथा $\text{फ}^{\text{२}} = [\text{ठ}^{\text{र}} \times \text{ट}^{\text{य}}]^{\text{ल}}$ तो सिद्ध करो कि यरल = १

(१४) यदि $\text{क}^{\text{म}+\text{न}} = [\text{क}^{\text{म}}]^{\text{न}}$ तो म की अर्हा न के पदों में निकालो।

तीसरा अध्याय

करणी और संकर राशियां

(surds and complex quantities)

३.१ $\sqrt[स]{क}$ रूप के पद को, जिसमें स धन पूर्णांक है, मूल (radical) कहते हैं। मूल चिह्न (radical sign) $\sqrt{}$ के नीचे की संख्या 'क' को आधार (base) तथा स को मूल का घातांक कहते हैं।

द्वितीय, तृतीय,......आदि वर्ण (order) के मूल क्रमशः द्विघात, त्रिघात.. ...आदि मूल कहलाते हैं।

३.२ मूलों का प्रह्रासन (reduction of radicals)—मूलगत राशि को उस राशि से, जिसका घात भिन्न है, व्यक्त कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ $\sqrt[स]{क}$ तथा $क^{\frac{1}{स}}$ एक ही राशि का प्रतिनिधान करते हैं।

घातांक नियमों की सहायता से निम्न सम्बन्धों की उपपत्ति सरलता से की जा सकती है।

(१) $(\sqrt[द]{क})^{ठ} = \sqrt[द]{क^{ठ}} = क^{\frac{ठ}{द}}$

(२) $\left(\sqrt[\text{ठ}]{\sqrt[\text{ट}]{\text{क}}}\right) = \sqrt[\text{टठ}]{\text{क}} = \text{क}^{\frac{1}{\text{टठ}}}$

(३) $\sqrt[\text{टत}]{\text{क}^{\text{ठत}}} = (\text{क}^{\text{ठत}})^{\frac{1}{\text{टत}}} = \text{क}^{\frac{\text{ठ}}{\text{ट}}}$

(४) $\sqrt[\text{ट}]{\text{क}} \times \sqrt[\text{ट}]{\text{ख}} = \sqrt[\text{ट}]{\text{कख}} = \text{क}^{\frac{1}{\text{ट}}} \times \text{ख}^{\frac{1}{\text{ट}}}$

(५) $\dfrac{\sqrt[\text{ट}]{\text{क}}}{\sqrt[\text{ट}]{\text{ख}}} = \sqrt[\text{ट}]{\dfrac{\text{क}}{\text{ख}}} = \dfrac{\text{क}^{\frac{1}{\text{ट}}}}{\text{ख}^{\frac{1}{\text{ट}}}}$

३.३ स के धन पूर्णांक होने पर $\text{क}^{\text{स}}$ की अर्हा सदैव निश्चित की जा सकती है। किन्तु स के भिन्नीय होने पर इसकी अर्हा कुछ दशाओं में पूर्ण रूप से निश्चित नहीं की जा सकती। उदाहरणार्थ ४, ९, २.२५, ६.२५ के वर्गमूल क्रमशः २, ३, १.५, २.५ परिमेय राशियां हैं। किन्तु यदि २, ३, ५ के वर्गमूल और २५, ३१.... के घनमूल निकालने का प्रयत्न किया जाय, तो ऐसी संख्याएं जो इनके वर्गमूल तथा घनमूल का पूर्ण रूप से प्रतिनिधान करें प्राप्त नहीं होतीं।

अतः यदि क किसी भी संख्या का पूर्ण $\text{स}^{\text{वां}}$ घात न हो तो $\sqrt[\text{स}]{\text{क}}$ को करणी तथा अपरिमेय राशि कहते हैं।

करणी का वर्ण (order) मूल का अभिधान करनेवाली संख्या से निश्चित किया जाता है। यथा $\sqrt[3]{\text{२२}}$, $\sqrt[4]{\text{२३}}$,... $\sqrt[\text{स}]{\text{क}}$ क्रमशः त्रिवर्ण, चतुर्वर्ण......तथा $\text{स}^{\text{वें}}$ वर्ण की करणियों के उदाहरण हैं।

३.३१ किन्हीं भी दो करणियों का समवर्ण करणियों में परिवर्तन हो सकता है।

उदाहरणार्थ—

$^{ट}\sqrt{क}$ तथा $^{ट}\sqrt{ख}$ राशियां क्रमशः

$^{टठ}\sqrt{क^{ठ}}$ तथा $^{टठ}\sqrt{ख^{ट}}$ में व्यक्त की जा सकती हैं।

इस विधा में करणियों की अर्हा न निकालते हुए भी कौन सी करणी बड़ी है यह निश्चित किया जा सकता है। पुनः इसी की सहायता से दो करणियों का गुणनफल तथा लब्धि भी निकाली जा सकती है।

उदाहरण १ — कौनसी बड़ी है $^{३}\sqrt{१७}$ अथवा $\sqrt{११}$?

दोनों राशियों का समवर्ण करणियों में परिवर्तन करने पर $^{३}\sqrt{१७} = {}^{६}\sqrt{१७^{२}}$

$= {}^{६}\sqrt{२८९}$

$\sqrt{११} = {}^{२}\sqrt{११^{३}}$

$= {}^{६}\sqrt{१३३१}$

अतः इससे ज्ञात होता है कि दूसरी बड़ी है।

उदाहरण २— $\sqrt{७}$ को $^{३}\sqrt{५}$ से गुणा करो।

$$\sqrt{७} \times \sqrt[3]{५} = \sqrt[3]{७^{3}} \times \sqrt[6]{५^{2}}$$

$$= \sqrt[3]{७^{3} \times ५^{2}}$$

$$= \sqrt[6]{८५७५}$$

उदाहरण ३—

$\sqrt[3]{२}$ का $\sqrt{३}$ से भाजन करो।

$$\sqrt[3]{२} — \sqrt{३} = \sqrt[6]{४} — \sqrt[6]{२७}$$
$$= \sqrt[6]{\frac{४}{२७}}$$

३.४ क के परिमेय राशि तथा $\sqrt{ख}$ के अपरिमेय राशि होने पर, वास्तविक राशि का सामान्यतम रूप क + $\sqrt{ख}$ लिया जायगा।

क + $\sqrt{ख}$ तथा क − $\sqrt{ख}$ रूप की राशियां अनुबद्ध वर्ग करणियां (conjugate quadratic surds) कहलाती हैं।

दो अनुबद्ध वर्ग करणियों का योग तथा गुणनफल परिमेय होता है।

क्योंकि योग (क + $\sqrt{ख}$) + (क − $\sqrt{ख}$) = २ क परिमेय है, तथा

गुणनफल (क + $\sqrt{ख}$) (क − $\sqrt{ख}$) = $क^{2}$ − ख परिमेय है।

गणित में यह रूढि है कि क + $\sqrt{ख}$ रूप की राशि अन्तिम फल के हर में नहीं रहनी चाहिए। हर को इन राशियों से मुक्त करने की विधा को हर का परिमेयकरण (rationalizing) कहते हैं। अब इन संख्याओं से सम्बद्ध

निम्न प्रमेयों का उपपादन किया जाता है।

३५ प्रमेय १—

यदि $क + \sqrt{ख} = य + \sqrt{र}$ जिसमें क तथा य परिमेय और $\sqrt{ख}$ तथा $\sqrt{र}$ अपरिमेय हों तो $क = य$ और $ख = र$

यह दिया गया है कि $क + \sqrt{ख} = य + \sqrt{र}$

$\therefore क - य + \sqrt{ख} = \sqrt{र}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने से

$(क - य)^२ + ख + २\sqrt{ख}\,(क - य) = र$

अथवा $२\sqrt{ख}\,(क - य) = र - ख - (क - य)^२$ प्राप्त होता है। अब वाम पक्ष अपरिमेय तथा दक्षिण पक्ष परिमेय है। जब तक प्रत्येक पक्ष शून्य के सम नहीं होता यह असम्भव है।

अतः $\sqrt{ख}\,(क - य) = ०$ किन्तु $\sqrt{ख} \neq ०$ (क्योंकि $\sqrt{ख}$ अपरिमेय है)

$\therefore क - य = ०$

अर्थात् $क = य$

और $ख = र$। इससे प्रमेय का स्थापन होता है।

प्रमेय २—

यदि क, ख, ग और घ परिमेय तथा $क + \sqrt{ख}$, तथा $ग + \sqrt{घ}$ इन दो वर्ग करणियों का योग तथा गुणनफल परिमेय हो तो $\sqrt{ख} + \sqrt{घ} = ०$ तथा $क = ग$। अब इनका योग

अर्थात् $(क + \sqrt{ख}) + (ग + \sqrt{घ})$ परिमेय है।

$क + ग + (\sqrt{ख} + \sqrt{घ})$ परिमेय है।

$क + ग + (\sqrt{ख} + \sqrt{घ})$ में अपरिमेय भाग शून्य होने

पर ही यह संभव होगा।

$\therefore \sqrt{ख} + \sqrt{घ} = ०$

अथवा $\sqrt{ख} = -\sqrt{घ}$

पुनः गुणनफल $(क + \sqrt{ख})(ग + \sqrt{घ})$ परिमेय है अर्थात् $कग + \sqrt{ख} \times \sqrt{घ} + \sqrt{ख} \times ग + \sqrt{घ} \times क$ परिमेय है

अथवा $कग - ख + \sqrt{ख}(ग - क)$ परिमेय है

[$\sqrt{घ} = -\sqrt{ख}$ रखने पर

$\sqrt{ख}$ का गुणक शून्य के सम होने पर ही यह संभव है।

$\therefore ग - क = ०$

$क = ग$

अतः यदि दो वर्ग करणियों का योग और गुणनफल परिमेय हो तो वे परस्पर अनुवद्ध होती हैं।

उदाहरण १ — $३ + \sqrt{२}$ का परिमेयकारक खण्ड निकालो।

$३ + \sqrt{२}$ की अनुवद्ध वर्ग करणी $३ - \sqrt{२}$ है

अतः अपेक्षित परिमेयकारक खण्ड $३ - \sqrt{२}$ है।

उदाहरण २ — $१ - \sqrt[३]{२}$ का परिमेयकारक खण्ड निकालो।

यदि $(१ - य)(१ + य + य^२) \equiv १ - य^३$ इस ऐकात्म्य में $य = \sqrt[३]{२}$ रखा जाय तो

$$(१ - \sqrt[३]{२})(१ + \sqrt[३]{२} + \sqrt[३]{४}) = १ - (\sqrt[३]{२})^३$$
$$= १ - २$$
$$= -१$$

वाम पक्ष के दो खण्डों का गुणनफल परिमेय है। अतः $१ + \sqrt[३]{२} + \sqrt[३]{४}$ यह $१ - \sqrt[३]{२}$ का परिमेयकारक खण्ड है।

उदाहरण ३— $\frac{५ - २\sqrt{३}}{४ + \sqrt{३}}$ को परिमेय हर के रूप में परिवर्तन कर के लिखो।

हर की अर्थात् $४ + \sqrt{३}$ की अनुबद्ध वर्गकरणी $४ - \sqrt{३}$ है। दत्त भिन्न के अंश तथा हर को $४ - \sqrt{३}$ से गुणा करने पर

$$\frac{(५ - २\sqrt{३})(४ - \sqrt{३})}{(४ + \sqrt{३})(४ - \sqrt{३})} = \frac{२० - ८\sqrt{३} - ५\sqrt{३} + ६}{१६ - ३}$$

$$= \frac{२६ - १३\sqrt{३}}{१३}$$

$$= २ - \sqrt{३}$$

उदाहरण ४—

$\frac{१}{२ - \sqrt{२} + \sqrt{३}}$ को परिमेय हर के रूप में व्यक्त करो।

$\frac{१}{(२ - \sqrt{२}) + \sqrt{३}}$ का परिमेयकरण

$$\frac{१}{(२ - \sqrt{२}) + \sqrt{३}} = \frac{(२ - \sqrt{२}) - \sqrt{३}}{[(२ - \sqrt{२}) + \sqrt{३}][(२ - \sqrt{२}) - \sqrt{३}]}$$

$$= \frac{२ - \sqrt{२} - \sqrt{३}}{(२ - \sqrt{२})^२ - ३}$$

$$= \frac{२ - \sqrt{२} - \sqrt{३}}{३ - ४\sqrt{२}}$$

$$= \frac{(२ - \sqrt{२} - \sqrt{३})(३ + ४\sqrt{२})}{(३ - ४\sqrt{२})(३ + ४\sqrt{२})}$$

$$= \frac{(२ - \sqrt{२} - \sqrt{३})(३ + ४\sqrt{२})}{९ - ३२}$$

$$= \frac{(\sqrt{२} + \sqrt{३} - २)(३ + ४\sqrt{२})}{२३}$$

३.६ काल्पनिक तथा संकर राशियां (imaginary and complex quantities)—

अब काल्पनिक संख्याओं पर विचार किया जायगा।

$य^२ + ४ = ०$ इस समीकार का साधन करो।

$य^२ = -४$ इस समीकार का समाधान य की ऐसी अर्हाओं से, जिनका वर्ग -४ है होता है। अभी तक विद्यार्थी केवल ऐसी संख्याओं से अभिज्ञ हैं जिनका वर्ग उनके धन अथवा ऋण रहते हुए भी धन रहता है। अतः यह संख्या जिसका वर्ग -४ है इन संख्याओं से भिन्न होनी चाहिए। $\sqrt{-४}$ जिसका वर्ग -४ है काल्पनिक संख्या कहलाती है।

$\sqrt{-४}$ को $\sqrt{४} \times \sqrt{-१}$ तथा $२\sqrt{-१}$ इस प्रकार लिख सकते हैं। सामान्यतः $\sqrt{-१}$ का श से अभिधान किया जाता है। अतः $\sqrt{-४}$ को २श इस रूप में भी लिख सकते हैं।

३.६१ श के गुणों का अनुसन्धान—

$\sqrt{-१} = \sqrt{-१}$ अर्थात् श = श

$(\sqrt{-१})^२ = (\sqrt{-१})(\sqrt{-१}) = -१$ अर्थात् $श^२ = -१$

$(\sqrt{-१})^३ = (\sqrt{-१})^२ (\sqrt{-१}) = -\sqrt{-१}$ अर्थात्
$श^३ = -श$

$(\sqrt{-१})^४ = (\sqrt{-१})^२ (\sqrt{-१})^२ = १$ अर्थात् $श^४ = १$

$[\sqrt{-१}]^{२स} = [(\sqrt{-१})^२]^स = (-१)^स$

$= \pm १$ स की युग्म अथवा अयुग्म अर्हानुसार

अर्थात् $(श)^{२स} = \pm १$ स की युग्म अथवा अयुग्म अर्हानुसार

$(\sqrt{-१})^{२स+१} = (\sqrt{-१})^{२स} (\sqrt{-१}) = \pm श$ स की युग्म अथवा अयुग्म अर्हानुसार

यदि श किसी भी पूर्णांक घात तक उद्यत हो तो उसका प्रहसन उपर्युक्त रीति से किया जा सकता है।

३.६२ अब $य^२ - ३य + २ = ०$ इस समीकार का साधन करो।

य की अर्हाएं जिनसे इस समीकार का समाधान होता है $\frac{३ \pm श\sqrt{३}}{२}$ अथवा $\frac{३}{२} \pm श\frac{\sqrt{२}}{३}$ हैं। यह स्पष्ट है कि ये वास्तविक तथा काल्पनिक संख्याओं के योग तथा अन्तर हैं। इस प्रकार से संघटित राशियां संकर राशियां कहलाती हैं।

संकर राशि (complex quantity)—यदि क तथा ख वास्तविक हों तो क+शख संकर राशि कहलाती है। इसमें क को वास्तविक घटक (real part) तथा ख को काल्पनिक घटक (imaginary part) कहते हैं।

सामान्यतः किसी भी संख्या का अभिधान क+शख से किया जाता है। इनमें ख को शून्य के सम लने से वास्तविक संख्या तथा क को शून्य के सम लेने से काल्पनिक संख्या प्राप्त होती है। यदि क$\neq$०, ख$\neq$० तो यह संकर राशि का प्रतिनिधान करती है।

३.६३ अनुबद्ध संकर राशियां— केवल काल्पनिक भागों के विपरीत चिह्न वाली राशियां अनुबद्ध संकर राशियां कहलाती हैं तथा प्रत्येक दूसरी की अनुबद्ध कहलाती है। ३+२श तथा ३−२श; य+शर तथा य−शर अनुबद्ध संकर राशियों के उदाहरण हैं।

३.७ दो संकर राशियों का योग, अन्तर, गुणनफल तथा भागफल संकर होता है।

मान लो क+शख, ग+शघ दो संकर राशियां हैं।

इनका योग तथा अन्तर

$$(\text{क}+\text{शख})\pm(\text{ग}+\text{शघ})$$
$$=(\text{क}\pm\text{ग})+\text{श}\,(\text{ख}\pm\text{घ})\ \text{संकर है।}$$

इनका गुणनफल

$$(\text{क}+\text{शख})\,(\text{ग}+\text{शघ})=(\text{कग}-\text{खघ})+\text{श}\,[\text{कघ}+\text{खग}]$$

संकर है।

इनका भागफल

$$\frac{\text{क}+\text{शख}}{\text{ग}+\text{शघ}}=\frac{(\text{क}+\text{शख})\ (\text{ग}-\text{शघ})}{(\text{ग}+\text{शघ})\ (\text{ग}-\text{शघ})}$$

[अंश तथा हर को (ग−शघ) से गुणा करने पर

$$= \frac{(\text{क} + \text{श}\text{ख})\ (\text{ग} - \text{श}\text{घ})}{\text{ग}^2 - \text{श}^2\text{घ}^2}$$

$$= \frac{(\text{क} + \text{श}\text{ख})\ (\text{ग} - \text{श}\text{घ})}{\text{ग}^2 + \text{घ}^2}$$

$$= \frac{(\text{क}\text{ग} + \text{ख}\text{घ}) + \text{श}\ (\text{ख}\text{ग} - \text{क}\text{घ})}{\text{ग}^2 + \text{घ}^2}$$

$$= \frac{\text{क}\text{ग} + \text{ख}\text{घ}}{\text{ग}^2 + \text{घ}^2} + \text{श}\ \frac{\text{ख}\text{ग} - \text{क}\text{घ}}{\text{ग}^2 + \text{घ}^2}$$ संकर है।

३.८ साध्य १—

यदि संकर राशि शून्य के सम हो तो उसका वास्तविक घटक शून्य होता है तथा काल्पनिक घटक भी शून्य होता है।

मान लो $\text{क} + \text{श}\text{ख} = 0$

$\therefore \text{क} = -\text{श}\text{ख}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने से तथा $\text{श}^2 = -1$ रखने से $\text{क}^2 = -\text{ख}^2$ प्राप्त होता है।

अर्थात् $\text{क}^2 + \text{ख}^2 = 0$

अब क तथा ख दोनों वास्तविक संख्याएं हैं अतः क^2 तथा ख^2 सदैव धन रहेंगे।

दो वास्तविक संख्याओं के वर्ग का योग शून्य के सम होने के लिए उन संख्याओं को स्वतः (अलग अलग) शून्य होना चाहिए।

अतः $\text{क} = 0$ तथा $\text{ख} = 0$

इससे साध्य का उपपादन होता है।

साध्य २— यदि दो संकर राशियां परस्पर सम हों तो उनके वास्तविक घटक तथा काल्पनिक घटक सम होते हैं।

यदि $क + शख = ग + शघ$ ....(१)

तो यह उपपादन करना है कि $क = ग$ तथा $ख = घ$।

(१) में पक्षान्तरण करने से

$(क - ग) + श (ख - घ) = ०$

$(क - ग) + श (ख - घ)$ यह संकर राशि शून्य के सम होने से $क - ग = ०$ तथा $ख - घ = ०$

[साध्य १ के अनुसार

$\therefore क = ग$ तथा $ख = घ$

३.८१ साध्य ३— दो अनुबद्ध संकर राशियों का योग तथा गुणनफल वास्तविक होता है।

मान लो $क + शख$ संकर राशि है। $क - शख$ इसकी अनुबद्ध होगी।

इनका योग $(क + शख) + (क - शख) = २क$ वास्तविक है।

इनका गुणनफल $(क + शख)(क - शख)$

$= क^२ - श^२ख^२$

$= क^२ + ख^२$ वास्तविक है।

३.८२ मापांक (modulus) की परिभाषा— संकर राशि के वास्तविक और काल्पनिक घटकों के वर्गफल के योग के वर्गमूल की धन महा. उस संकर राशि का मापांक कहलाता है। अतः $क + शख$ अथवा $क - शख$ का मापांक $+ \sqrt{क^२ + ख^२}$ है।

साध्य ४— दो संकर राशियों के गुणनफल का मापांक उनके मापांकों के गुणनफल के सम होता है।

क + शख तथा ग + शघ दो संकर राशियां हैं जिनके मापांक क्रमशः $\sqrt{क^2 + ख^2}$ तथा $\sqrt{ग^2 + घ^2}$ हैं।

$$\text{इनका गुणनफल} = (क + शख)(ग + शघ)$$
$$= (कग - खघ) + श(खग + कघ)$$

गुणनफल का मापांक

$$= \sqrt{(कग - खघ)^2 + (खग + कघ)^2}$$
$$= \sqrt{क^2 ग^2 + ख^2 घ^2 + क^2 घ^2 + ख^2 ग^2}$$
$$= \sqrt{(क^2 + ख^2)(ग^2 + घ^2)}$$
$$= \sqrt{(क^2 + ख^2)} \sqrt{(ग^2 + घ^2)}$$

= क + शख तथा ग + शघ के मापांकों का गुणनफल

३.३ गणित में यह रूढ़ि है कि संकर राशि, अन्तिम फल के हर में नहीं रहनी चाहिए। हर को इन संख्याओं से रिक्त करने की विधा को हर का परिमेयकरण (rationalization) कहते हैं।

उदाहरण १— हर को परिमेय करो $\frac{३ + २श}{५ + ३श}$

हर की अनुयक्त संकर राशि ५ − ३श है। अतः अंश तथा हर को इससे गुणा करने पर

$$\frac{३ + २श}{५ + ३श} \times \frac{५ - ३श}{५ - ३श} = \frac{१५ + ६ + श(१० - ९)}{५^2 - ३^2 श^2}$$

$$=\frac{२१+श}{२५+९}$$

$$=\frac{२१+श}{३४}$$

उदाहरण २— (य + शर) का वर्गमूल निस्सारण करो।

मान लो (य + शर) का वर्गमूल ग + शघ है

अर्थात् ग + शघ = $(य + शर)^{\frac{1}{2}}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने से

$ग^2 - घ^2 + २शगघ = य + शर$

दोनों पक्षों के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों के समीकरण से

$य = ग^2 - घ^2$ ....(१)

$र = २गघ$ ....(२)

समीकार (१) तथा (२) का साधन करने पर ग तथा घ की ये अर्हायें प्राप्त होती हैं।

$$ग = \pm \left\{\frac{\sqrt{य^2 + र^2} + य}{२}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$घ = \pm \left\{\frac{\sqrt{य^2 + र^2} - य}{२}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

समीकार (१) तथा (२) का समाधान करने वाली ग तथा घ की अर्हायें लेने से अपेक्षित वर्गमूल प्राप्त होता है।

प्रश्नावलि ३

(१) $\sqrt{१५०}$, $\sqrt[३]{३२०}$, $\sqrt[४]{१४४}$, $\sqrt[४]{७६८}$, $\sqrt[५]{६०८}$
इनका सरलतम रूप में प्रकाशन करो।

(२) (क) $७+\sqrt{३}$ (ख) $३+\sqrt{५}$ (ग) $\sqrt{३}+\sqrt{२}$ के परिमेयकारक खण्ड निकालो।

(३) (क) $\sqrt[३]{७}+२$ (ख) $\sqrt[३]{५}+३$
(ग) $\sqrt[३]{३}+\sqrt[३]{२}$ के परिमेयकारक खण्ड निकालो।

(४) (क) $\dfrac{\sqrt{३}-१}{\sqrt{३}+१}$ (ख) $\dfrac{१}{१+\sqrt{२}+\sqrt{३}}$

(ग) $\dfrac{१}{१-\sqrt{३}+\sqrt{५}}$

इन के हरों का परिमेयकरण करो और जहां संभव हो, सरल करो।

(५) सरल करो—

$$\frac{\sqrt{५}+१}{\sqrt{५}-\sqrt{२}}+\frac{\sqrt{५}-१}{\sqrt{५}+\sqrt{२}}-\frac{२(\sqrt{५}-\sqrt{२})}{\sqrt{८९-२८\sqrt{१०}}}$$

[मद्रास

(६) इन संख्याओं में से प्रत्येक की अनुबद्ध संख्या लिखो
(क) $३+२श$ (ख) $१+३श$ (ग) $७+५श$ जहां $श=\sqrt{-१}$

(७) (क) $(३+२श)$ का $(५-श)$ से गुणन करो
(ख) $(७श-३)$ का $(६-४श)$ से गुणन करो।

(८) हर को परिमेय रूप में परिवर्तन करके व्यक्त करो—

(क) $\frac{१}{३ + २श}$ (ख) $\frac{१}{७ + ८श}$ (ग) $\frac{१}{३ + \sqrt{-२}}$

(घ) $\frac{(३ + २श)(४ - ३श)}{(३ - २श)(४ + ३श)}$

(९) क + शख के रूप में व्यक्त करो—

(अ) $\frac{३ + ४श}{१ - २श}$ (आ) $\frac{१ + २श}{३ - ४श}$

(इ) (क + श) ३ − २शख)

(ई) (२ + २श) (१ + $\sqrt{}$३श)

(१०) य तथा र की अर्हाएं, जिनसे इन समीकारों के समाधान होता है निश्चित करो।

(क) य + शर = २ − ३श

(ख) २य − शर = ६ + ५श

(ग) (य + ३श) (१ + शर) = ८ − श

(घ) (य + र + ३श) = ५ + ३शर

(११) (क) −७ + २४श (ख) ५ + १२श (ग) ३ − ४श के वर्गमूल निकालो।

(१२) यदि $(क + शख)^{-१} = म\,(क - शख)$ तो दिखाओ कि

$$क^{२} + ख^{२} = \frac{१}{म}$$

(१३) यदि य = कोज्या इ + श ज्या इ तो दिखाओ कि

$$य^{-१} = कोज्या\ इ - श\ ज्या\ इ$$

चौथा अध्याय

समान्तर श्रेढी

(arithmetical progression)

४.१ पूर्वानुपर (successive) राशियां, जिन्हें किसी निश्चित नियमानुसार लिखा जा सकता है, श्रेढी (progression) में रहती हैं।

अतः २, ५, ८, ११, जिसमें प्रत्येक पद पूर्व पद में ३ का योग करने से प्राप्त होता है, श्रेढी है। और ५, २५, १२५, ६२५ भी, जिसमें प्रत्येक पद पूर्व पद का ५ से गुणन करने पर प्राप्त होता है, श्रेढी है।

किन्तु २, ७, –१०, १५, २५ जिस में कोई भी पद पूर्व पद से किसी निश्चित नियम द्वारा प्राप्त नहीं किया जा सकता, श्रेढी नहीं है।

४.२ उस श्रेढी की राशियां, जिसका प्रत्येक पद, पूर्व पद में निश्चित राशि का योग अथवा वियोग करने से प्राप्त होता है समान्तर श्रेढी में रहती हैं। यह निश्चित राशि समान्तर श्रेढी का प्रचय (common difference) कहलाती है।

(२, ४, ६, ८,...) तथा (५, २, −१, −४...)
इन समान्तर श्रेढियों का प्रचय क्रमशः २ और −३ है।

४.३ समान्तर श्रेढी में प्रथम पद का क से, अन्तपद का अ से, प्रचय का च से, पदसंख्या का स से, और योग का यो से अभिधान किया जायगा।

४.४ समान्तर श्रेढियों से सम्बद्ध कुछ मूलभूत सूत्र—

(१) समान्तर श्रेढी का कोई भी पद निकालना।
मान लो दत्त श्रेढी का प्रथम पद क है और प्रचय च है।

प्रथम पद क और प्रचय च है।
अतः द्वितीय पद क + च होगा।
तृतीय पद क + २च होगा।
चतुर्थ पद क + ३च होगा।
....
....
पंद्रहवां पद क + १४च होगा।

यदि तवें पद का $प_त$ से अभिधान किया जाय तो तवां पद $प_त$ = क + (त − १) च होगा।
यदि अन्तपद अ सवां पद हो तो

अ = क + (स − १) च

(२) स पदों का योग।
अपेक्षित योग का यो से अभिधान करने पर
यो = क + (क + च) + (क + २च) + ... + (अ − २च) + (अ − च) + अ .... (१)

इसी योग को उत्क्रम (reverse order) में लिखने पर

$$\text{यो} = \text{अ} + (\text{अ} - \text{च}) + (\text{अ} - २\text{च}) + \ldots\ldots$$
$$+ (\text{क} + २\text{च}) + (\text{क} + \text{च}) + \text{क} \ldots\ldots \quad (२)$$

(१) और (२) का योग करने से

$$२\text{यो} = (\text{क} + \text{अ}) + (\text{क} + \text{अ}) + \ldots \text{स} \text{ अभियार्गों तक}$$

[प्रत्येक समीकार में स पद होने के कारण

$$२\text{यो} = \text{स}\ (\text{क} + \text{अ})$$

$$\text{यो} = \frac{\text{स}}{२}(\text{क} + \text{अ})$$

$$\text{अथवा यो} = \frac{\text{स}}{२}[२\text{क} + (\text{स} - १)\text{च}]$$

[$\text{अ} = \text{क} + (\text{स} - १)\ \text{च}$ रखने पर

अतः पूर्व लिखित सूत्रों से यह स्पष्ट है कि पदों की संख्या ज्ञात होने पर यदि (१) प्रथम पद और प्रचय अथवा (२) प्रथम पद और अन्त पद ज्ञात हों तो श्रेढी का योग निकाला जा सकता है।

उदाहरण १— १०, ११½, १३, १४½, इस श्रेढी का १४ पदों तक योग निकालो।

दत्त श्रेढी में प्रथम पद १० है, प्रचय $\frac{३}{२}$ है और पदों की संख्या १४ है।

$$\therefore \text{यो} = \frac{१४}{२}\ [२ \times १० + (१४ - १) \times \frac{३}{२}]$$
$$= ७\ [२० + \frac{३९}{२}]$$
$$= २७६\tfrac{१}{२}$$

उदाहरण २— किसी समान्तर श्रेढी का प्रथम पद १० है १८वाँ पद ९५ है। श्रेढी का प्रचय और २० पदों का योग निकालो।

यदि दत्त श्रेढी का प्रचय च हो तो

१८वाँ पद १०+१७ च होगा

∴ ९५=१०+१७ च

अथवा च=५

अतः २० पदों का योग

$=\frac{२०}{२}[२\times१०+(२०-१)५]$

$=१०[२०+९५]$

$=११५०$

∴ २० पदों का अपेक्षित योग ११५० है और प्रचय ५ है।

उदाहरण ३— यदि किसी समान्तर श्रेढी में तवाँ पद ८ त −५ है तो उस के १८ पदों का योग निकालो।

यहां $प_त = ८त - ५$

$प_१ = ८ - ५ = ३$ त=१ रखने पर

$प_२ = १६ - ५ = ११$ त=२ रखने पर

$प_३ = २४ - ५ = १९$ त=३ रखने पर

∴ प्रचय $= प_२ - प_१ = ११ - ३ = ८$

∴ $यो_{१८} = \frac{१८}{२}[२\times३+१७\times८]$

$= ९[६+१३६]$

$= १२७८$

४.५ समान्तर मध्यक (arithmetic mean)—यदि क तथा ख के बीच में म का निवेश (insertion) करने पर क, म, ख समान्तर श्रेढी में हों तो म को, क और ख का समान्तर मध्यक कहते हैं।

म की अर्हा सरलता से निकाली जा सकती है क्योंकि क, म, ख समान्तर श्रेढी में हैं।

इसलिए ख − म = म − क

$$\text{अथवा } म = \frac{क + ख}{२}$$

अनेक समान्तर मध्यक (arithmetic means)—यदि क तथा ख राशियों के बीच में $म_१$, $म_२$,... $म_त$ का निवेश करने पर क, $म_१$, $म_२$, $म_३$ ... $म_त$, ख समान्तर श्रेढी में हों तो $म_१$, $म_२$... $म_त$ क तथा ख के समान्तर मध्यक कहलायेंगे।

४.६ क तथा ख के बीच में त समान्तर मध्यकों का निवेश करना।

मान लो $म_१$, $म_२$, $म_३$ ... $म_त$ अपेक्षित समान्तर मध्यक हैं।

अतः परिभाषानुसार

क, $म_१$, $म_२$,... $म_त$, ख ये (त + २) पद समान्तर श्रेढी में हैं। इस श्रेढी का अन्त पद ख तथा प्रथम पद क है। यदि प्रचय च हो तो ख = क + (त + १) च

$$\text{अथवा } च = \frac{ख - क}{त + १}$$

अतः $म_१$ = + दूसरा पद

$$= क + \frac{ख - क}{त + १}$$

$म_२$ = तीसरा पद

$$= क + २ \frac{(ख - क)}{त + १}$$

$म_त$ = $(त+१)^{वां}$ पद

$$= क + त\frac{(ख - क)}{त + १}$$

अतः $म_१, म_२ \cdot \cdot म_त$ की अर्हाएं क्रमशः

$$क + \frac{ख - क}{त + १}, \; क + २ \frac{ख - क}{त + १}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$क + त \frac{(ख - क)}{त + १} \text{ है}$$

उदाहरण— ५½ तथा १९ के बीच में ८ समान्तर मध्यक निवेश करो।

मान लो अपेक्षित मध्यक $म_१, म_२, \ldots म_८$ हैं।

इसलिए ५½, $म_१, म_२ \ldots म_८$, १९ समान्तर श्रेढी में होने चाहिएं।

इसमें ५½ प्रथम पद, और १९, $१०^{वां}$ पद है।

यदि प्रचय च हो तो

$$१९ = ५\tfrac{१}{२} + ९ च$$

$$\therefore \quad च = \frac{३}{२}$$

$\therefore$ ७, ८$\frac{१}{२}$, १०, ११$\frac{१}{२}$, ...१७$\frac{१}{२}$ आदि अपेक्षित मध्यक हैं।

४.७ यदि किसी समान्तर श्रेढी का प्रथम पद, प्रचय और योग दिया हो तो पदों की संख्या निकालना।

दत्त समान्तर श्रेढी में यो, क, और च की अर्हाएं दी हुई हैं।

अतः स की अर्हा का निश्चय करने के लिए अनुच्छेद ४.३ में दिए गए सम्बन्ध में यो, क, च की अर्हाओं का आदश करने पर

$$यो = \frac{स}{२}[२क + (स-१)च]$$

$$२यो = २सक + (स^२ - स)च$$

$$चस^२ + (२क - च)स - २यो = ०$$

यह स का द्विघात समीकार है। अतः सामान्यतः स की दो अर्हाएं प्राप्त होंगी। क्योंकि स पदों की संख्या का अभिधान करता है इसलिए आवश्यक रूप से स की धन पूर्णांक अर्हा लेनी चाहिए। भिन्नीय तथा ऋण अर्हाएं निरर्थक होंगी।

उदाहरण १— यदि ५१, ४८, ४५ इस समान्तर श्रेढी का योग ३९६ हो तो पदों की अपेक्षित संख्या निकालो।

मान लो पदों की संख्या स है।

$$प्रचय = ४८ - ५१ = -३$$

$$अतः ३९६ = \frac{स}{२}[२ \times ५१ + (स-१)(-३)]$$

$= \frac{स}{२} [१०२ - ३स + ३]$

$\therefore ३स^२ - १०५स + ७९२ = ०$

अथवा $स^२ - ३५स + २६४ = ०$

$\therefore स = ११$ अथवा २४

अतः दत्त योग के लिए श्रेढी के ११ अथवा २४ पद लेने चाहिएं।

उदाहरण २— १, ४, ७......इस श्रेढी के कितने पद लेने से योग २८७ होगा?

इस श्रेढी में क = १, च = ३ और यो = २८७ है। यदि पदों की अपेक्षित संख्या स हो तो अनुच्छेद ४.४ में दिए गए सम्बन्ध में इन अर्हाओं का आदेश करने पर

$२८७ = \frac{स}{२} [२ + (स - १)३]$

$५७४ = २स + ३स^२ - ३स$

$३स^२ - स - ५७४ = ०$

$\therefore स = १४$ अथवा $- \frac{४१}{३}$

स की $- \frac{४१}{३}$ ऋण तथा भिन्नीय अर्हा त्याज्य है।

अतः पदों की अपेक्षित संख्या १४ है।

४.८ समान्तर श्रेढी के कुछ विशेष गुण—

(१) यदि समान्तर श्रेढी के प्रत्येक पद में एक ही राशि का योग अथवा वियोग किया जाय तो नई श्रेढी

समान्तर श्रेढी होगी और उसका प्रचय पहिली श्रेढी के प्रचय के सम होगा।

मान लो दत्त समान्तर श्रेढी क, क+च, क+२च.. है। इस के प्रत्येक पद में ख का योग करने पर क+ख, क+च+ख, क+२च+ख ...नई श्रेढी होगी। स्पष्टतः यह समान्तर श्रेढी है जिसका प्रचय

(क+२च+ख)−(क+च+ख)

=(क+च+ख)−(क+ख)

=च

अतः उपर्युक्त कथन सत्य है।

(२) यदि किसी भी समान्तर श्रेढी के प्रत्येक पद को एक ही अचल से गुणा किया जाय तो इससे प्राप्त नए पद समान्तर श्रेढी में रहते हैं और प्राप्त श्रेढी का प्रचय, दत्त अचल तथा दत्त समान्तर श्रेढी के प्रचय का गुणनफल होता है।

मान लो क, क+च, क+२च,......दत्त श्रेढी है। प्रत्येक पद को ख से गुणा करने पर क ख, (क+च) ख, (क+२च) ख......नए पद प्राप्त होते हैं।

ये पद स्पष्टतः समान्तर श्रेढी में हैं। इस श्रेढी का प्रचय (क+२च) ख−(क+च) ख=(क+च) ख−क ख

=च×ख

अतः उपर्युक्त कथन सत्य है।

४.९ उदाहरण १— किसी समान्तर श्रेढी के तीन अनुगामी पदों का गुणनफल १०५ है और योग १५ है। पदों की महाएं निकालो।

मान लो $क-च$, $क$, $क+च$ ये तीन पद समान्तर श्रेढी में हैं।

इनका गुणन-फल १०५ है

$\therefore क(क^2 - च^2) = १०५$..............(१)

इनका योग १५ है

$\therefore क-च+क+क+च = १५$

$\therefore ३क = १५$

अथवा $क = ५$..............................(२)

(१) में $क=५$ रखने पर

$५(२५-च^2) = १०५$

$२५ - च^2 = २१$

$च^2 = ४$

$च = \pm २$

अतः $च = २$ लेने से ३, ५, ७ ये पद मिलते हैं और $च = -२$ लेने से ७, ५, ३ ये पद मिलते हैं।

$\therefore$ अपेक्षित तीन पद ३, ५, ७ हैं।

उदाहरण २— यदि क, ख, ग समान्तर श्रेढी में हैं तो दिखाओ कि

(१) $\frac{१}{खग}, \frac{१}{गक}, \frac{१}{कख}$

(२) ख+ग, ग+क, क+ख भी समान्तर श्रेढी में हैं।

(१) यदि क, ख, ग समान्तर श्रेढी में हों तो

$\frac{१}{कखग}$ से गुणा करने पर

$\frac{\text{क}}{\text{कखग}}$, $\frac{\text{ख}}{\text{कखग}}$, $\frac{\text{ग}}{\text{कखग}}$ भी समान्तर श्रेढी में होंगे

∴ $\frac{१}{\text{खग}}$, $\frac{१}{\text{कग}}$, $\frac{१}{\text{कख}}$ समान्तर श्रेढी में हैं।

(२) मान लो ख+ग, ग+क, क+ख समान्तर श्रेढी में हैं।

∴ (क+ख) − (ग+क) = (ग+क) − (ख+क)

अर्थात् ख − ग = क − ख

अथवा ग − ख = ख − क

किन्तु यह क, ख, ग के समान्तर श्रेढी में रहने के लिए प्रतिबंध है।

यह दिया गया है कि क, ख, ग समान्तर श्रेढी में हैं अतः यह मानना कि ख+ग, ग+क, क+ख समान्तर श्रेढी में हैं, सत्य है।

प्रश्नावलि ४

(१) निम्न श्रेढियों में स$^{\text{वाँ}}$ पद निकालो—

(अ) ९, ८$\frac{१}{३}$, ७$\frac{२}{३}$, ...

(आ) २, ९, १६, ...

(इ) ४, १३, २२, ...

(ई) $\frac{१}{\text{क}}$, $\frac{२}{\text{क}}$, $\frac{३}{\text{क}}$, ...

(उ) $\frac{१}{\text{स}}$, $\frac{\text{स}+१}{\text{स}}$, $\frac{२\text{स}+१}{\text{स}}$, ...

(२) निम्न श्रेढियों का योग निकालो—

(अ) ३, $७\frac{१}{४}$, $११\frac{१}{२}$, ...२० पदों तक

(आ) ७५, ७२, ६९, ...१६ पदों तक

(इ) $\frac{२}{३}$, $\frac{५}{६}$, १, ... ३० पदों तक

(ई) ४, $\frac{१३}{४}$, $\frac{५}{२}$, ... १० पदों तक

(उ) २·३५, ३·७, ५·०५,...... २१ पदों तक

(ऊ) $\frac{३}{\sqrt{५}}$, $\sqrt{५}$, $\frac{७}{\sqrt{५}}$ ......२५ पदों तक

(ए) (३क−५ख), (४क−७ख), (५क−९ख),......
...स पदों तक

(ऐ) १, ३, ५, ७,............स पदों तक

(३) (अ) $१\frac{१}{४}$ और $६\frac{१}{४}$ के बीच में ११ मध्यक निवेश करो।

(आ) २ और ५७ के बीच में १० मध्यक निवेश करो।

(इ) १ और ४१ के बीच में ७ मध्यक निवेश करो।

(ई) $स^{२}$ और १ के बीच में स मध्यक निवेश करो।

(उ) क और ख के बीच में (२स+१) मध्यक निवेश करो और मध्य पद (middle term) की अर्हा निकालो।

(४) किसी समान्तर श्रेढी में रहने वाले प्रत्येक दो अनुगामी पदों के बीच समान्तर मध्यकों की एक ही संख्या का निवेश किया जाय तो दिखाओ कि सब पद समान्तर श्रेढी में रहेंगे।

(५) किसी समान्तर श्रेढी का १०$^{वां}$ पद १२ है और २०$^{वां}$ पद १७ है तो उसके १५ पदों का योग निकालो।

(६) किसी समान्तर श्रेढी का १०$^{वां}$ पद २५ है और २५$^{वां}$ पद ५५ है। इस श्रेढी का ५०$^{वां}$ पद और ५० पदों तक योग निकालो।

(७) यदि किसी समान्तर श्रेढी का स$^{वां}$ पद $\frac{१}{६}$ (१० – ७स) है तो सिद्ध करो कि इसके स पदों का योग $\frac{स}{१२}$(१३ – ७स) है।

(८) किसी समान्तर श्रेढी के तीन अनुगामी पदों का योग ५१ है और पहले तथा तीसरे का गुणनफल २७३ है। पदों की अर्हाएं निकालो।

(९) किसी समान्तर श्रेढी में रहने वाली ५ संख्याओं का योग २५ है और प्रथम तथा अन्त के पदों का गुणनफल १६ है तो संख्याओं की अर्हाएं निकालो।
[नागपुर १९२९

(१०) किसी समान्तर श्रेढी में ६ पद हैं। सिद्ध करो कि प्रथम और अन्त के पदों का योग तीसरे और चौथे पदों के योग के सम है।

(११) किसी समान्तर श्रेढी का स$^{वां}$ पद $\frac{स}{६} - \frac{१}{६}$ है तो उसके १२ पदों का योग निकालो।

२) किसी समान्तर श्रेढी का त$^{वां}$ पद $\frac{१}{३}$(त + ५) है तो

उस के १६ पदों का योग निकालो।

(१३) ५, ७, ९,... इस श्रेढी के कितने पद लेने से योग ४८० होगा ?

(१४) ३ से आरंभ कर कितनी पूर्वानुपर अयुग्म संख्याएं लेनेसे उनका योग २८८ होगा ?

(१५) यदि ५, ८, ११,......इस समान्तर श्रेढी के स पदों का योग १०२५ हो तो पदों की अपेक्षित संख्या निकालो।

(१६) किसी समान्तर श्रेढी का प्रथम पद ७२ तथा प्रचय ५ है। इस श्रेढी का योग १४६३ होने के लिए कितने पद लेने चाहिएं ?

(१७) किसी समान्तर श्रेढी का प्रथम पद ४ है और अन्तपद १०९ है। यदि उस के स पदों का योग २०३४ हो तो स की अर्हा निकालो।

(१८) एक व्यक्ति अपने मित्र को १००० रु० उधार देता है। परस्पर यह ठहराव होता है कि वह ब्याज न लेगा और धन उत्तरोत्तर २ रु० से न्यून होने वाले मासिक प्रभागों में लौटा लेगा। यदि पहला प्रभाग ६४ रु० हो तो उधार दिया हुआ धन कितने मासों में चुकाया जा सकेगा ?

(१९) एक सीधी सड़क पर १०० पत्थर पांच पांच यष्टियों (yard) के अन्तर पर रखे गए हैं। पहले पत्थर से ५ यष्टियों के अन्तर पर रखे हुए पात्र के पास से एक दौड़ने वाला दौड़ना प्रारंभ करता है। यदि वह एक-एक करके पत्थरों को उठाकर पात्र में डालता जाय तो

उसे कितनी यष्टियां दौड़ना होगा ?

(२०) दिखाओ कि ४, १२, २०, २८,......इस श्रेढी के स पदों का योग किसी युग्म संख्या का वर्ग है।

(२१) सिद्ध करो कि किसी भी समान्तर श्रेढी में २स पदों के उत्तरार्ध का योग, प्रथम ३स पदों के योग का $\frac{1}{3}$ होता है।

(२२) सिद्ध करो कि १, ३, ५, ७,......इस श्रेढी में पदों की किसी भी युग्म संख्या के पूर्वार्ध और उत्तरार्ध के योगों की निष्पत्ति अचल है।

(२३) यदि किसी समान्तर श्रेढी में

$यो_म = \frac{1}{2} यो_{म+स} = \frac{1}{2} यो_{म+त}$ हो तो सिद्ध करो कि

$स \times त = म(म+स+त)$ [मद्रास १९००

(२४) किन्हीं दो समान्तर श्रेढियों के स पदों के योगों की निष्पत्ति यदि $\frac{३ स+१}{४ स-६}$ हो तो उनके १५वें पदों की निष्पत्ति निकालो।

(२५) दो समान्तर श्रेढियों के स पदों के योगों की निष्पत्ति (३स+२१) : (५स−३) है। दिखाओ कि उनके ९वें पद एक ही हैं।

(२६) प्राकृतिक संख्याओं को इन समूहों में विभक्त किया गया है—

१, (२+३), (४+५+६), (७+८+९+१०),...... और इसी प्रकार आगे भी।

सिद्ध करो कि सवें समूह की संख्याओं का योग

$\frac{1}{2}$ स (स² + १) है। [कलकत्ता

(२७) अयुग्म संख्याओं को इन समूहों में विभक्त किया गया है—

(१+३), (५+७+९+११), (१३+१५+१७+१९+२१+२३),......

दिखाओ कि सवें समूह के पदों का योग ४स³ है। अतः इससे यह अनुमान निकालो कि प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के योग का वर्ग है।

(२८) यदि किसी श्रेढी के स पदों का योग कस² + खस हो, जिसमें क तथा ख अचल हैं, तो सिद्ध करो कि यह समान्तर श्रेढी है।

[नागपुर १९३१

(२९) यदि किसी समान्तर श्रेढी के स पदों का योग कस² हो तो श्रेढी निकालो।

(३०) यदि किसी समान्तर श्रेढी का तवाँ पद क और थवाँ पद ख हो, तो दिखाओ कि (त+थ) पदों का योग $\frac{त+थ}{२}\left[क+ख+\frac{क-ख}{त-थ}\right]$ है।

(३१) यदि किसी समान्तर श्रेढी के त पदों का योग थ हो और थ पदों का योग त, तो उसके (त+थ) पदों का योग निकालो।

(३२) यदि किसी समान्तर श्रेढी के त पदों का योग थ पदों के योग के सम हो तो दिखाओ कि (त+थ) पदों का योग शून्य के सम है।

(३३) यदि किसी समान्तर श्रेढी का $त^{वां}$, $थ^{वां}$, $द^{वां}$ पद क्रमशः ट, ठ, ड हो तो दिखाओ कि

$$ट\,(थ-द)+ठ\,(द-त)+ड\,(त-थ)=०$$

(३४) यदि किसी समान्तर श्रेढी के त, थ, द पदों के योग क्रमशः ट, ठ, ड हों तो दिखाओ कि

$$ट\,\frac{थ-द}{त}+ठ\,\frac{द-त}{थ}+ड\,\frac{त-थ}{द}=०$$

(३५) यदि $\frac{१}{ख+ग}, \frac{१}{ग+क}, \frac{१}{क+ख}$ समान्तर श्रेढी में हों तो दिखाओ कि $क^{२}$, $ख^{२}$, $ग^{२}$ भी समान्तर श्रेढी में होंगे।

(३६) यदि $(ख-ग)^{२}$, $(ग-क)^{२}$, $(क-ख)^{२}$, समान्तर श्रेढी में हों तो दिखाओ कि

$\frac{१}{ख-ग}, \frac{१}{ग-क}, \frac{१}{क-ख}$ भी समान्तर श्रेढी में होंगे।

(३७) यदि $क^{\frac{१}{य}} = ख^{\frac{१}{र}} = ग^{\frac{१}{ल}}$ और $ख^{२}=कग$ तो दिखाओ कि य, र, ल समान्तर श्रेढी में हैं।

पांचवां अध्याय

गुणोत्तर श्रेढी

(geometrical progression)

५.१ जिस श्रेढी में किसी पद की, पूर्वगामी पद से निष्पत्ति एक ही रहती है वह गुणोत्तर श्रेढी कहलाती है।

१, २, ४, ८, १६, ३२,......

$\frac{१}{३}, \frac{१}{९}, \frac{१}{२७}, \frac{१}{८१},$......

क, कन, कन^२, कन^३, ... ये गुणोत्तर श्रेढी के उदाहरण हैं।

साधारण निष्पत्ति (common ratio)—जिस साधारण खण्ड से पद बढ़ते या घटते हैं उसे साधारण निष्पत्ति कहते हैं। साधारण निष्पत्ति किसी भी पद का पूर्वगामी पद से भाजन करने पर मिलती है। उदाहरणार्थ प्रथम श्रेढी में साधारण निष्पत्ति २ है और द्वितीय तथा तृतीय श्रेढी में वह क्रमशः $\frac{१}{३}$, और न है।

५.१२ गुणोत्तर श्रेढी के किसी पद को निकालना—

मान लो गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद क तथा साधारण निष्पत्ति न है। पहिले पद को न से गुणा करने पर द्वितीय पद प्राप्त होता है।

अब प्रथम पद क है।

अतः द्वितीय पद कन होगा।

तृतीय पद $कन^2$ होगा।

चतुर्थ पद $कन^3$ होगा।

तेरहवां पद $कन^{12}$ होगा।

यदि तवें पद का अभिधान $प_त$ से किया जाय तो तवां पद

$$प_त = कन^{त-1} \text{ होगा।}$$

अतः ऊपर के पदों के अवलोकन से यह नियम बन सकता है कि किसी पद में न का घात, उस पद की संख्या से एक अंक न्यून होता है।

५.१३ यदि गुणोत्तर श्रेढी के किन्हीं दो पदों की अर्हा ज्ञात हो तो यह श्रेढी पूर्णतया निश्चित हो सकती है।

मान लो तवां और थवां पद क्रमशः अ और आ हैं।

यदि गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद क और साधारण निष्पत्ति न हो तो तवें और थवें पदों की अर्हाएं ये होंगी—

$प_त = कन^{त-1}$ किन्तु $प_त = अ$

$\therefore कन^{त-1} = अ$ ....(१)

और

$प_थ = कन^{थ-1}$ किन्तु $प_थ = आ$

$\therefore$ $कन^{थ-१} = आ$ ....(२)

अतः (१) का (२) से भाजन करने पर

$$\frac{कन^{त-१}}{कन^{थ-१}} = \frac{अ}{आ}$$

$$न^{त-थ} = \frac{अ}{आ}$$

अथवा $न = \left[\frac{अ}{आ}\right]^{\frac{१}{त-थ}}$ ....(३)

(१) में न की इस अर्हा का आदेश करने पर

$$क\left[\frac{अ}{आ}\right]^{\frac{त-१}{त-थ}} = अ$$

$\therefore$ $क = अ\left[\frac{अ}{आ}\right]^{\frac{त-१}{त-थ}}$ ....(४)

क और न की अर्हाएं ज्ञात होने से श्रेढी पूर्णतया निश्चित हो जाती है।

उदाहरण— किसी गुणोत्तर श्रेढी में ४था और ७वां पद क्रमशः ४० और ३२० है। इस का ५वां पद निकालो।

मान लो दत्त श्रेढी का प्रथम पद क है और साधारण निष्पत्ति न।

$\therefore$ $प_४ = कन^३ = ४०$ ....(१)

$प_७ = कन^६ = ३२०$ ....(२)

$\therefore$ $\frac{प_७}{प_४} = \frac{कन^६}{कन^३} = \frac{३२०}{४०}$

अथवा $न^३ = ८$

$\therefore$ $न = २$

(१) में न=२ रखने पर क=५ प्राप्त होता है

$\therefore$ प$_5$ = क × न^4

= ५ × २^4

= ८०

५.२ गुणोत्तर मध्यक (geometric mean)— यदि तीन राशियां क, म और ख गुणोत्तर श्रेढी में हों तो म, क तथा ख का गुणोत्तर मध्यक कहलाता है। अथवा

क तथा ख के बीच में म का निवेश करने पर यदि क, म, ख गुणोत्तर श्रेढी में रहते हों तो म, क और ख का गुणोत्तर मध्यक कहलाता है।

म की अर्हा क और ख के पदों में निकाली जा सकती है। क्यों कि क, म, ख गुणोत्तर श्रेढी में हैं

इसलिए $\frac{म}{क} = \frac{ख}{म}$

अथवा म^2 = कख

म = $\pm\sqrt{कख}$

अतः दो राशियों का गुणोत्तर मध्यक उनके गुणनफल का वर्गमूल होता है।

अनेक गुणोत्तर मध्यक (geometric means)— यदि क तथा ख इन दो राशियों क बीच में म$_1$, म$_2$ ...म$_स$ का निवेश करने पर क, म$_1$, म$_2$, ...म$_स$, ख गुणोत्तर श्रेढी में हों तो म$_1$, म$_2$, ...म$_स$ ये क और ख के गुणोत्तर मध्यक कहलाते हैं।

५.२१ दो राशियों के बीच में मध्यकों की दत्त संख्या निवेश करना— मान लो क और ख दो राशियां हैं जिनके

बीच में त (दत्त संख्या) मध्यकों का निवेश करना है।

मान लो $म_1, म_2, म_3,$ $म_त$ अपेक्षित मध्यक हैं।

$\therefore$ क, $म_1, म_2, म_3, \cdot$ $म_त$, ख गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

मान लो इस गुणोत्तर श्रेढी की साधारण निष्पत्ति न है।

अतः इस गुणोत्तर श्रेढी में, जिसका प्रथम पद क है और साधारण निष्पत्ति न है, ख $(त+२)$वां पद होगा।

$$\therefore ख = क \times न^{त+1}$$

$$अथवा\ न^{त+1} = \frac{ख}{क}$$

$$\therefore न = \left[\frac{ख}{क}\right]^{\frac{1}{त+1}}$$

$$अब\ म_1 = दूसरा\ पद$$
$$= क \times न$$
$$= क\left[\frac{ख}{क}\right]^{\frac{1}{त+1}}$$

$$म_2 = तीसरा\ पद$$
$$= क\ न^2$$
$$= क\left[\frac{ख}{क}\right]^{\frac{2}{त+1}}$$

....

$$इसी\ प्रकार\ म_त = (त+१)^{वां}\ पद$$
$$= क \times न^त$$
$$= क\ \left[\frac{ख}{क}\right]^{\frac{त}{(त+1)}}$$

अतः अपेक्षित मध्यक $म_1, म_2, \ldots\ldots म_त$

क्रमशः $क\left(\frac{ख}{क}\right)^{\frac{१}{त+१}}$, $क\left(\frac{ख}{क}\right)^{\frac{२}{त+१}}$, $क\left(\frac{ख}{क}\right)^{\frac{३}{त+१}}$ हैं

उदाहरण—३ और $\frac{३}{२५६}$ के बीच में ७ गुणोत्तर मध्यकों का निवेश करो।

मान लो $म_१, म_२, \dots\dots म_७$ अपेक्षित मध्यक हैं।

$\therefore$ $३, म_१, म_२, \dots\dots म_७, \frac{३}{२५६}$ गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

अब इस श्रेढी में ९ पद हैं, प्रथम पद ३ है तथा ९ वाँ पद $\frac{३}{२५६}$ है। यदि साधारण निष्पत्ति 'न' हो तो

$$\frac{३}{२५६} = ३ \times न^{८}$$

$$न^{८} = \frac{१}{२५६}$$

$$= २^{-८}$$

$$\therefore न = \pm \frac{१}{२}$$

अब $न = +\frac{१}{२}$ होने पर

$$म_१ = \text{दूसरा पद}$$

$$= ३ \times \frac{१}{२}$$

$$= \frac{३}{२}$$

$म_३$ = तीसरा पद

$= ३\left[\frac{१}{२}\right]^{२}$

$= \frac{३}{४}$

....

$म_७ = ८^{वां}$ पद

$= ३\left[\frac{१}{२}\right]^{७}$

$= \frac{३}{१२८}$

अतः अपेक्षित मध्यक

$\frac{३}{२}, \frac{३}{४}, \ldots \ldots \frac{३}{१२८}$ हैं।

तथा $न = -\frac{१}{२}$ होने पर

अपेक्षित मध्यक

$-\frac{३}{२}, \frac{३}{४}, \ldots \ldots -\frac{३}{१२८}$ होंगे।

५.३ जिसमें प्रथम पद क है और साधारण निष्पत्ति न है ऐसी गुणोत्तर श्रेढी का स पदों तक योग निकालना।

मान लो क, कन, $कन^{२}$,...$कन^{स-१}$ यह दत्त श्रेढी है।
स पदों के योग का $यो_स$ से अभिधान करने पर

$यो = क + कन + कन^{२} \ldots\ldots + कन^{स-१}$ .... (१)

दोनों पक्षों का साधारण निष्पत्ति 'न' से गुणा करने पर
$यो \times न = कन + कन^{२} + \ldots\ldots + कन^{स-१} + कन^{स} \ldots(२)$

(१) में से (२) को घटाने पर

$$यो\ (१ - न) = क\ (१ - न^{स})$$

$$\therefore \quad यो = \frac{क\ (१ - न^{स})}{१ - न}$$

उदाहरण १— $\sqrt{३}$, १, $\frac{१}{\sqrt{३}}$, $\frac{१}{३}$ …. …. इस श्रेढी के १८ पदों का योग निकालो।

दत्त श्रेढी में प्रथम पद $\sqrt{३}$ है, साधारण निष्पत्ति $\sqrt{\frac{१}{३}}$ है और पदों की संख्या १८ है

अतः १८ पदों का योग

$$यो = \frac{\sqrt{३}\ (१ - (\sqrt{\frac{१}{३}})^{१८})}{१ - \frac{१}{\sqrt{३}}}$$

$$= \frac{३\ (१ - \frac{१}{३^{९}})}{\sqrt{३} - १}$$

$$= \frac{(३^{९} - १)}{३^{८}\ (\sqrt{३} - १)}$$

$$= \frac{१९६८३ - १}{३^{८}\ (\sqrt{३} - १)}$$

$$= \frac{१९६८२}{६५६१\ (\surd ३ - १)}$$

हर के परिमेयकरण से

$$यो = \frac{१९६८२}{६५६१\ (\surd ३ - १)} \cdot \frac{(\surd ३ + १)}{(\surd ३ + १)}$$

$$= \frac{९८४१}{६५६१} (\surd ३ + १)$$

उदाहरण २— १, २, ४,......इस श्रेढी के पदों का योग २५५ रहने के लिए कितने पद लेने चाहिएं ?

दत्त श्रेढी का प्रथम पद १ है और योग २५५ है। मान लो पदों की संख्या स है।

$$साधारण\ निष्पत्ति = \frac{२}{१} = २$$

अतः

$$२५५ = \frac{२^{स} - १}{२ - १}$$

$$= २^{स} - १$$

$$२^{स} = २५६$$

$$= २^{८}$$

$$\therefore स = ८$$

अतः अपेक्षित योग के लिए ८ पद लेने चाहिएं।

प्रश्नावलि ५

(१) इन श्रेढियों में निर्दिष्ट पद निकालो—

(क) १, −२, ४, −८,...... इसमें १०वाँ पद

(ख) ३०, १५, ७½, ... इसमें ७वाँ पद

(ग) $\frac{१}{५}, -\frac{२}{१५}, \frac{४}{४५}$,...... इसमें ८वाँ पद

(घ) $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}, \frac{४}{३}$,............ इसमें सवाँ पद

(२) इन श्रेढियों का योग निकालो—

(क) २+४+८+......१० पदों तक

(ख) $१-\frac{२}{३}+\frac{४}{९}+$......६ पदों तक

(ग) $२+\sqrt{२}+१+\frac{१}{\sqrt{२}}+$ ...... १२ पदों तक

(घ) $\frac{२}{३}-\frac{१}{२}+\frac{३}{४}+$...... स पदों तक

(ङ) $क^{ट}+क^{ट+ठ}+क^{ट+२ठ}+$...... स पदों तक

(च) $\frac{क}{य}\frac{\sqrt{५}}{\sqrt{३}}+\frac{\sqrt{क}}{\sqrt{य}}+\frac{\sqrt{३}}{\sqrt{५}}+$...... स पदों तक

(३) किसी गुणोत्तर श्रेढी में रहने वाले तीन अनुगामी पदों का गुणनफल २१६ है और युग्मों में उनके गुणनफल का योग १२६ है। पदों की अर्हाएं निकालो।

(४) किसी गुणोत्तर श्रेढी में रहने वाले तीन पदों का योग २४$\frac{५}{९}$ और गुणनफल ६४ है। पदों की अर्हायें निकालो।

(५) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी में ६ पद हों तो सिद्ध करो कि प्रथम तथा अन्त-पद का गुणनफल तृतीय तथा चतुर्थ पदों के गुणनफल के सम है।

(६) किसी गुणोत्तर श्रेढी में रहने वाले स पदों का योग य है, गुणनफल र है और पदों के व्युत्क्रमों का योग ल है। सिद्ध करो कि

$$र^२ = \left(\frac{य}{ल}\right)^{स}$$ [नागपुर

(७) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद क हो, स$^{वां}$ पद अ हो और प्रथम स पदों का गुणनफल ग हो तो सिद्ध करो कि

$$ग = (क \times अ)^{\frac{स}{२}}$$ [कलकत्ता १९१८

(८) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी के स पदों का योग ७२८ हो, साधारण निष्पत्ति ३ हो और प्रथम पद २ हो तो स की अर्हा निकालो।

(९) किसी गुणोत्तर श्रेढी की साधारण निष्पत्ति ३ है। प्रथम और तृतीय पदों का योग, प्रथम और द्वितीय पदों के वर्ग के योग के सम है। श्रेढी के स पदों का

योग निकालो और यदि स=६ हो तो दिखाओ कि योग ३६४ है।

(१०) (क) $\frac{१}{२७}$ और ९ के बीच में ४ गुणोत्तर मध्यक निवेश करो।

(ख) २ तथा ४८६ के बीच में ४ गुणोत्तर मध्यक निवेश करो।

(ग) $\frac{३२}{८१}$ तथा $\frac{९}{२}$ के बीच में ५ गुणोत्तर मध्यक निवेश करो।

(घ) २७ तथा $\frac{१}{२७}$ के बीच में ५ गुणोत्तर मध्यक निवेश करो।

(११) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी में प्रथम पद २ और १०वाँ पद १ हो तो साधारण निष्पत्ति का निश्चय करो।

(१२) किन्हीं दो संख्याओं का योग उनके गुणोत्तर मध्यक से ९ अधिक है और उनके योग का वर्ग, उनके गुणनफल से १८९ अधिक है। संख्याएं निकालो।

[मद्रास

(१३) यदि क तथा ख इन दो राशियों के बीच में स गुणोत्तर मध्यक निवेश किए जायं तो दिखाओ कि इन मध्यकों का गुणनफल (क ख)$^{\frac{स}{२}}$ के सम है।

(१४) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी में पदों की संख्या युग्म हो

तो दिखाओ कि आदि और अन्त पदों से सम-दूर पदों का गुणनफल दो मध्य पदों के गुणनफल के सम है। [पंजाब

(१५) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी के स, २ स, और ३ स पदों का योग क्रमशः $यो_1$, $यो_2$ और $यो_3$ हो तो दिखाओ कि $$यो_1[यो_3 - यो_2] = [यो_2 - यो_1]^2$$

(१६) यदि $यो_1$, $यो_2$,... ... $यो_स$ किसी गुणोत्तर श्रेढी के क्रमशः १, २,...... स पदों के योगों का अभिधान करते हों तो $(यो_1 + यो_2 + यो_3 + ... + यो_स)$ की अर्हा निकालो।

(१७) यदि $क : ख = २ + \sqrt{३} : २ - \sqrt{३}$ तो सिद्ध करो कि क तथा ख के बीच का समान्तर मध्यक गुणोत्तर मध्यक का दुगना है।

(१८) यदि क और ख के बीच का समान्तर मध्यक उनके गुणोत्तर मध्यक के प्रति एसा हो जैसा म है न के प्रति तो दिखाओ कि

$$\frac{क}{ख} = \frac{म + \sqrt{म^2 - न^2}}{म - \sqrt{म^2 - न^2}}$$

(१९) यदि $क + ख + ग$, $\sqrt{क^2 + ख^2 + ग^2}$ और $क - ख + ग$ गुणोत्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि क, ख और ग गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

(२०) यदि क, ख, ग, घ गुणोत्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि $क^2 + ख^2$, $ख^2 + ग^2$, $ग^2 + घ^2$ भी गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

(२१) यदि क, ख, ग समान्तर श्रेढी में और य, र, ल गुणोत्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि

$$य^{ख-ग} \times र^{ग-क} \times ल^{क-ख} = १$$

(२२) यदि क, ख तथा ग गुणोत्तर श्रेढी में हों और य तथा र क्रमशः क, ख तथा ख, ग के बीच के समान्तर मध्यक हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{क}{य} + \frac{ग}{र} = २ \text{ और } \frac{१}{य} + \frac{१}{र} = \frac{२}{ख}$$

(२३) किसी गुणोत्तर श्रेढी में $(न+थ)^{वां}$ पद $=$ म, और $(त-थ)^{वां}$ पद $=$ न है। $त^{वां}$ और $थ^{वां}$ पद निकालो।

(२४) किसी समान्तर श्रेढी का प्रथम पद और किसी गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद एक ही है। एक का प्रचय और दूसरे की साधारण निष्पत्ति दोनों २ के सम हैं। दोनों के ५ पदों का योग समान है। प्रत्येक श्रेढी का ५ वां पद निकालो।

५.४ समान्तर गुणोत्तर श्रेढी (arithmetico-geometric series)— क, $(क+ख)न$, $(क+२ख)न^२$, $(क+३ख)न^३$,............

इस प्रकार की श्रेढी पर विचार करो।
इस के प्रत्येक पद में दो खण्ड हैं।
प्रथम पद क और १ का गुणनफल है।
द्वितीय पद (क+ख) और न का गुणनफल है।
तृतीय पद (क+२ख) और $न^२$ का गुणनफल है।

चतुर्थ पद (क+३ख) और $न^3$ का गुणनफल है।

यह स्पष्ट है कि क, क+ख, क+२ख, क+३ख समान्तर श्रेढी में हैं और

$१, न, न^२, न^३ \ldots\ldots$ गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

इससे यह ज्ञात होता है कि इस श्रेढी के पद अंशतः समान्तर श्रेढी के और अंशतः गुणोत्तर श्रेढी के नियमानुसार बनते हैं।

इस प्रकार की श्रेढी समान्तर गुणोत्तर श्रेढी कहलाती है।

५.४१ समान्तर गुणोत्तर श्रेढी का स पदों तक योग—यदि क, (क+ख)न, (क+२ख) $न^२$,...... इस श्रेढी के स पदों के योग का यो से अभिधान किया जाय तो

$$यो = क + (क+ख)\,न + (क+२ख)\,न^२ + \ldots\ldots$$
$$+ [क+(स-२)ख]न^{स-२} + [क+(स-१)ख]न^{स-१} \ldots(१)$$

गुणोत्तर श्रेढी की साधारण निष्पत्ति न से दोनों पक्षों का गुणा करने पर इस प्रकार विन्यस्त करो—

$$यो \times न = कन + (क+ख)न^२ + \ldots\ldots$$
$$+ [क+(स-२)ख]न^{स-१} + [क+(स-१)ख]न^{स} \ldots(२)$$

(२) को (१) में से घटाने पर

$$यो\,(१-न) = क + [खन + खन^२ + \ldots\ldots खन^{स-१}]$$
$$-[क+(स-१)ख]न^{स}$$

प्रथम अभिचार में (स−१) पदों की गुणोत्तर श्रेढी है।

इन (स−१) पदों का योग करने पर

$$\text{यो}\,(१-\text{न}) = \text{क} + \frac{\text{खन}\,[१-\text{न}^{\text{स}-१}]}{१-\text{न}} - [\text{क}+\overline{\text{स}-१\text{ख}}]\text{न}^{\text{स}}$$

$$\therefore \text{यो} = \frac{\text{क}}{१-\text{न}} + \frac{\text{खन}[१-\text{न}^{\text{स}-१}]}{(१-\text{न})^२} - \frac{[\text{क}+(\text{स}-१)\,\text{ख}]\,\text{न}^{\text{स}}}{१-\text{न}}$$

यह दत्त समान्तर गुणोत्तर श्रेढी के स पदों का योग है।

उदाहरण — $१+४\text{य}+७\text{य}^२+१०\text{य}^३ + \ldots\ldots$ इस श्रेढी के स पदों का योग निकालो।

यदि इस श्रेढी के स पदों क योग का 'यो' से अभिधान किया जाय तो

$$\text{यो} = १ + ४\text{य} + ७\text{य}^२ + १०\text{य}^३ + \ldots\ldots + [१+३(\text{स}-२)]\,\text{य}^{\text{स}-२} + [१+३(\text{स}-१)]\,\text{य}^{\text{स}-१} \quad \ldots\ldots(१)$$

दोनों पक्षों का य से गुणन करने पर

$$\text{यो}\times\text{य} = \text{य}+४\text{य}^२+७\text{य}^३+१०\text{य}^४\ldots\ldots + [१+३(\text{स}-२)]\text{य}^{\text{स}-१} + [१+३(\text{स}-१)]\text{य}^{\text{स}} \ldots(२)$$

(१) में से (२) को घटाने पर

$$\text{यो}\,(१-\text{य}) = १+३\text{य}+३\text{य}^२\ldots\ldots+३\text{य}^{\text{स}-१} - [१+३\,(\text{स}-१)]\,\text{य}^{\text{स}}$$

$$= १+३\text{य}\,[१+\text{य}+\text{य}^२+\ldots+\text{य}^{\text{स}-२}] - (३\text{स}-२)\,\text{य}^{\text{स}}$$

$$=१+२य\frac{१-य^{स-१}}{१-य}-(२स-२)\,य^{स}$$

$$\therefore यो=\frac{१}{१-य}+\frac{२य[१-य^{स-१}]}{(१-य)^{२}}-\frac{(२स-२)य^{स}}{१-य}$$

$=$स पदों का योग

५.५ अनन्त श्रेढी (infinite series)—यदि किसी श्रेढी में पदों की पूर्वानुपरता का अन्त किसी निश्चित पद के पश्चात् होता हो तो वह सान्त (finite) श्रेढी कहलाती है। इसके विपरीत यदि श्रेढी में पदों की पूर्वानुपरता असीम (without limit) हो तो वह अनन्त श्रेढी कहलाती है।

क, कन, कन^{२},……कन^{स}, कन$^{स+१}$…… यह अनन्त श्रेढी का उदाहरण है।

५.५१ अनन्त गुणोत्तर श्रेढी का योग— क, कन, कन^{२}+…… यह अनन्त श्रेढी है। इसका स पदों तक योग निकालो और जैसे स अनन्ती की ओर प्रवृत्त हो इस योग के आचरण का निरीक्षण करो। स पदों के योग का यो$_{स}$ अभिधान करने पर

$$यो_{स}=\frac{क\,(१-न^{स})}{१-न}$$

$$=\frac{क}{१-न}-\frac{कन^{स}}{१-न}$$

अब जैसे स अनन्ती की ओर प्रवृत्त होता है —

$$\underset{स \to \infty}{\text{सी}} \text{ योग}_स = \underset{स \to \infty}{\text{सी}} \frac{\text{क}}{१-\text{न}} - \underset{स \to \infty}{\text{सी}} \frac{\text{कन}^स}{१-\text{न}}$$

क्योंकि प्रथम पद में अर्थात् $\frac{\text{क}}{१-\text{न}}$ में स नहीं है इस-

लिए स के अनन्ती की ओर प्रवृत्त होने पर भी उसकी अहां सदैव $\frac{\text{क}}{१-\text{न}}$ के सम ही रहेगी। किन्तु $\frac{\text{क}}{१-\text{न}}$ $\text{न}^स$ इस पद

में स, अंश में के न का घात है।

यदि संख्या की दृष्टि से न > १ तो स जैसे जैसे बढ़ता है अर्थात् जैसे स $\to \infty$ $\text{न}^स$ भी बढता जाता है और अन्त में

जब स $\to \infty$ तब $\frac{\text{क}}{१-\text{न}}$ $\text{न}^स \to \infty$

$$\text{अतः} \quad \underset{स \to \infty}{\text{सी}} \text{ योग}_स = \frac{\text{क}}{१-\text{न}} - \underset{स \to \infty}{\text{सी}} \frac{\text{कन}^स}{१-\text{न}}$$

अथवा स $\to \infty$ सी $\text{योग}_स$

= [परिमित राशि] − [अनन्त राशि] = अनन्त राशि

अतः जिस गुणोत्तर श्रेढी की साधारण निष्पत्ति संख्या की दृष्टि से १ अधिक हो उसका अनन्ती तक योग अपरिमित होता है।

यदि −१ < न <१ अर्थात् संख्या की दृष्टि से न <१ तो जैसे स बढ़ता है $\text{न}^स$ घटता जाता है।

अर्थात् स $\to \infty$ $\text{न}^स \to ०$

अर्थात् स $\rightarrow \infty$, $\frac{\text{फन}^{\text{स}}}{१-\text{न}} \rightarrow ०$ की ओर प्रवृत्त अत्यल्प-राशि

अतः $\underset{\text{स} \rightarrow \infty}{\text{सी}}$ $\text{यो}_{\text{स}} = \frac{\text{फ}}{१-\text{न}} - \underset{\text{स} \rightarrow \infty}{\text{सी}} \frac{\text{फ}}{१-\text{न}} \text{न}^{\text{स}}$

दक्षिण पक्ष का द्वितीय पद सीमा में प्रथम पद की तुलना में नगण्य है।

अतः $\underset{\text{स} \rightarrow \infty}{\text{सी}}$ $\text{यो}_{\text{स}} = \frac{\text{फ}}{१-\text{न}}$

= परिमित राशि

अतः जिस गुणोत्तर श्रेढी की साधारण निष्पत्ति संख्या की दृष्टि से १ न्यून होती है उसका अनन्ती तक योग परिमित होता है और वह $\frac{\text{फ}}{१-\text{न}}$ के सम होता है।

उदाहरण— $१, \frac{१}{३}, \frac{१}{९}, \frac{१}{२७}, \ldots\ldots$ इस श्रेढी का अनन्ती तक योग निकालो।

दत्त श्रेढी का प्रथम पद १ तथा साधारण निष्पत्ति $\frac{१}{३}$ है। इसके स पदों का योग

$$\text{यो}_{\text{स}} = \frac{१-\left(\frac{१}{३}\right)^{\text{स}}}{१-\frac{१}{३}}$$

$$= \frac{१}{१-\frac{१}{३}} - \frac{\left(\frac{१}{३}\right)^{स}}{१-\frac{१}{३}}$$

$$= \frac{३}{२} - \frac{१}{२\times ३^{स-१}}$$

अब जैसे स $\rightarrow \infty$ राशि $\frac{१}{३^{स-१}} \rightarrow ०$

$$\text{अतः} \quad \underset{स\rightarrow\infty}{\text{सी}} \text{ योग}_{स} = \frac{३}{२} - \underset{स\rightarrow\infty}{\text{सी}} \frac{१}{२\times ३^{स-१}}$$

$$= \frac{३}{२} - (\text{शून्य की ओर प्रवृत्त अत्यल्प राशि})$$

$$= \frac{३}{२}$$

५.६ समान्तर गुणोत्तर श्रेढी का अनन्तों तक योग— फ,(फ+ख)न, (फ+२ख)न^{२}+ ...... इस समान्तर गुणोत्तर श्रेढी के स पदों का योग अनुच्छेद ५.४१ में प्राप्त किया गया है।

$$\text{अतः} \quad \text{योग}_{स} = \frac{फ}{१-न} + \frac{ख\ न}{(१-न)^{२}} - \frac{ख\ न^{स}}{(१-न)^{२}} - \frac{[फ + (स-१)\ ख]}{१-न} न^{स}$$

यदि संख्या की दृष्टि से न > १ तो जैसे जैसे स बढता

है $\frac{\text{ख}\,\text{न}^{\text{स}}}{(१-\text{न})^{२}}$, और $\frac{\text{क}+(\text{स}-१)\text{ख}}{१-\text{न}}\text{न}^{\text{स}}$

अनन्ती की ओर प्रवृत्त होते हैं। अतः इस श्रेढी का अनन्ती तक योग अनन्त होता है।

यदि संख्य' की दृष्टि से न < १ तो जैसे स —> ∞ $\frac{\text{ख}\text{न}^{\text{स}}}{(१-\text{न})^{२}}$ और $\frac{[\text{क}+(\text{स}-१)\,\text{ख}]}{१-\text{न}}\text{न}^{\text{स}}$ पद प्रथम दो पदों की तुलना में नगण्य होते हैं और अन्त में इनका लोप हो जाता है।

अतः इस दशा में अनन्ती तक योग

$$\text{यो}_{\infty} = \frac{\text{क}}{१-\text{न}} + \frac{\text{ख}\,\text{न}}{(१-\text{न})^{२}}$$

उदाहरण— $\frac{२}{७} + \frac{४}{७^{२}} + \frac{६}{७^{३}} + \frac{८}{७^{४}} + \ldots$ इस श्रेढी का अनन्ती तक योग निकालो।

$$\text{यो}_{\infty} = \frac{२}{७}+\frac{४}{७^{२}}+\frac{६}{७^{३}}+\frac{८}{७^{४}}+\ldots\ldots\ldots\ldots(१)$$

दोनों पक्षों को $\frac{१}{७}$ से गुणा करने पर

$$\frac{\text{यो}_{\infty}}{७} = \frac{२}{७^{२}}+\frac{४}{७^{३}}+\frac{६}{७^{४}}+\ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

(२) को (१) में से घटाने पर

$$\text{यो}_{\infty} - \frac{\text{यो}_{\infty}}{७} = \frac{२}{७}+\frac{२}{७^{२}}+\frac{२}{७^{३}}+\ldots\ldots\ldots\infty \text{ तक}$$

$$\frac{६}{७}\text{यो}_\infty = \frac{२}{७}\left[\frac{१}{१-\frac{२}{७}}\right]$$

[गुणोत्तर श्रेढी का अनन्तो तक योग करने पर.

$$\text{यो}_\infty = \frac{७}{१८}$$

५७ आवर्त दशमिक (recurring decimals)— आवर्त-दशमिक गुणोत्तर श्रेढी का अच्छा उदाहरण है। आवर्त दशमिक गुणोत्तर श्रेढी में रहनेवाली राशियों से बनते हैं। एक, दो, तीन अकों के आवर्त होने के अनुसार इन श्रेढियों की साधारण निष्पत्ति क्रमश $\frac{१}{१०}, \frac{१}{१००}, \frac{१}{१०००}$ रहती है। ऐसे दशमिक का सवादी भिन्न श्रेढी का योग करने से प्राप्त होता है।

विद्यार्थियों को यह ज्ञात है कि $\frac{२}{३}$ अनन्त आवर्त दशमिक ·६६६६ [जिसके लिये ·$\dot{६}$ सक्षिप्त रूप है] के सम है।

अब $\frac{६}{१०} + \frac{६}{१०^२} + \frac{६}{१०^३} + \frac{६}{१०^४} + \cdot$ इस श्रेढी पर विचार करो। इसका स पदों तक योग करने से

$$\text{यो}_स = \frac{२}{३} - \frac{२}{३\times१०^स}$$

अब जैसे जैसे स बढ़ता है वैसे वैसे $\frac{२}{३ \times १०^{स}}$ घटता है और श्रेढी का योग $\frac{२}{३}$ की अर्हा के सन्निकट आता है।

अतः जैसे स $\rightarrow \infty$ $\frac{२}{३ \times १०^{स}} \rightarrow ०$

$\therefore$ $यो_{स}$ $_{स \rightarrow \infty} = \frac{२}{३}$

यह अर्हा सामान्य गणित के नियम से प्राप्त अर्हा के समान है।

अतः ०.६६६६... अथवा $\dot{६}$ से अभिहित भिन्न $\frac{२}{३}$, अन्य रीति से इस अनन्ता गुणोत्तर श्रेढ़ी के रूप में लिखा जा सकता है— $\frac{६}{१०} + \frac{६}{१०^{२}} + \frac{६}{१०^{३}} + \frac{६}{१०^{४}} + \ldots\ldots \infty$

इससे यह स्पष्ट है कि किसी भी आवर्त-दशमिक का संवादी भिन्न, उसकी संवादी अनन्त गुणोत्तर श्रेढी के योग के सम होता है।

उदाहरण— आवर्त-दशमिक .१$\dot{२}\dot{३}$ का संवादी लघ्वंश भिन्न निकालो।

अब .१$\dot{२}\dot{३}$ =. १२३२३२३२३.........

$$= \frac{१}{१०} + \frac{२३}{१०००} + \frac{२३}{१०००००} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{१}{१०} + \frac{२३}{१०^३} + \frac{२३}{१०^५} + \dots\dots\dots$$

$$= \frac{१}{१०} + \frac{२३}{१०^३}\left[१ + \frac{१}{१०^२} + \frac{१}{१०^४} + \dots\dots\dots\right]$$

$$= \frac{१}{१०} + \frac{२३}{१०^३} \times \frac{१}{१ - \frac{१}{१०^२}}$$

$$= \frac{१}{१०} + \frac{२३}{१०^३} \quad \frac{१०^२}{९९}$$

$$= \frac{१}{१०} + \frac{२३}{९९०}$$

$$= \frac{६१}{४९५}$$

अतः .१२̇३̇ का संवादी लघ्वंश भिन्न $\frac{६१}{४९५}$ है।

५.८ आवर्त-दशभिक का संवादी भिन्न निकालना—

मान लो दत्त आवर्त-दशभिक द है। इस में अनावर्ती अंकों का अभियान त करता है, और उन की संख्या प है। आवर्ता अंकों का अभिधान थ करता है और उन की संख्या फ है।

अतः द = त थ थ थ...............

दोनों पक्षों को $१०^{प+फ}$ और $१०^{प}$ से गुणा करने पर

$१०^{प+फ} \times$ द = तथ × थ थ थ......... (अ)

और $१०^{प} \times द = त.थथथ$................ (आ)

(अ) में से (आ) को घटाने पर

$$१०^{प} \times द\,(१०^{फ} - १) = तथ - त$$

अतः $$द = \frac{तथ - त}{१०^{प}(१०^{फ} - १)}$$

अतएव आवर्त-दशमिक द का संवादी भिन्न

$$\frac{तथ - त}{१०^{प}(१०^{फ} - १)}$$ है।

अब $१०^{फ} - १$ में ९, फ वार है।

अतः $१०^{प}\,(१०^{फ} - १)$ में प शून्यों से अनुगत ९, फ वार है।

$\frac{त\,थ - त}{१०^{प}\,(१०^{फ} - १)}$ के रूप का अवलोकन करने से दत्त आवर्त-दशमिक का संवादी भिन्न निकालने के लिए नियम बनाया जा सकता है।

अंश प्राप्त करने के लिए अनावर्ती और आवर्ती दशमिकों की पूर्णांक संख्या में से अनावर्ती अंकों की पूर्णांक संख्या घटाई जाती है। हर को प्राप्त करने के लिए अनावर्ती अंकों की संख्या के सम शून्यों से अनुगत आवर्ती अंकों की संख्या के सम ९ लिए जाते हैं।

उदाहरण— ·१२̇३̇ की भिन्न निकालो।

अनावर्त तथा आवर्त अंकों की पूर्णांक संख्या १२३ है।

अनावर्त अंशों की पूर्णांक संख्या १ है।

अतः अंश $= १२३ - १ = १२२$

इसमें दो आवर्त अंक हैं और एक अनावर्त अंक।

$\therefore$ हर $= ९९०$

$\therefore$ उपर्युक्त आवर्त-दशमिक का संवादी लघ्वंश भिन्न

$= \frac{१२२}{९९०}$ अर्थात् $\frac{६१}{४९५}$

प्रश्नावलि ६

(१) इन श्रेढियों का स पदों तक योग निकालो—

(क) $१ + ३य + ५य^२ + ७य^३ + \dots\dots$

(ख) $१ + \frac{२}{२} + \frac{३}{२^२} + \frac{४}{२^३} + \dots\dots$

(ग) $६ \times ७ + ११ \times ७^२ + १६ \times ७^३ + \dots\dots$

(२) इन श्रेढियों का अनन्ती तक योग निकालो—

(क) $\sqrt{३} + १ + \frac{१}{\sqrt{३}} + \dots\dots$

(ख) $३ - १ + \frac{१}{३} - \frac{१}{९} + \dots\dots$

(ग) $\sqrt{५} + \frac{१}{\sqrt{५}} + \frac{१}{५\sqrt{५}} + \dots\dots$

(घ) $(\sqrt{२}+१)+१+(\sqrt{२}-१)+\ldots\ldots$

(३) इन श्रेढियों का अनन्ती तक योग निकालो—

(क) $\frac{२}{६}+\frac{३}{६^२}+\frac{२}{६^३}+\frac{३}{६^४}+\ldots\ldots\ldots$

(ख) $१+\frac{२}{५}+\frac{३}{५^२}+\ldots\ldots\ldots$

(ग) $१+\frac{३}{२}+\frac{५}{४}+\frac{७}{८}+\ldots\ldots\ldots$

(घ) $\frac{१}{३}+\frac{३}{९}+\frac{५}{२७}+\ldots\ldots\ldots$

(४) इन श्रेढियों का योग निकालो—

(क) ३+५, ६+२५, ९+१२५,......स पदों तक

(ख) $य+फ$, $य^२+२फ$, $य^३+३फ$,......स पदों तक

[कलकत्ता

(ग) $\frac{फ}{य}-\frac{ख}{य^२}, \frac{फ}{य^३}-\frac{ख}{य^४}, \ldots\ldots \infty$ तक $य^२>१$

(घ) क+ख+२क+२ख+५क+४ख......(२स) पदों तक

(५) इस श्रेढी का स पदों तक और यदि संभव हो तो अनन्ती तक योग निकालो—

$$१+\frac{३}{४}+\frac{७}{१६}+\frac{१५}{६४}+\frac{३१}{२५६}+\ldots\ldots$$

(६) यदि स की सब मह़ाओं के लिए किसी श्रेढी के स पदों का योग $क+खय^स$ हो तो $स^{वाँ}$ पद और श्रेढी की

जाति निकालो।

(७) (क) .३४६२ (ख) ०·५ (ग) ·२३७ के संवादी भिन्न निकालो।

(८) यदि $य = १ + क + क^२ + \ldots\ldots \infty$ तक

और $र = १ + ख + ख^२ + \ldots\ldots \infty$ तक

जिसमें क और ख एक से न्यून हैं तो सिद्ध करो कि

$$१ + कख + क^२ख^२ + \ldots\ldots \infty \text{ तक} = \frac{यर}{य + र - १}$$

(९) यदि $यो_१, यो_२, यो_३, \ldots\ldots यो_स$ स अनन्त गुणोत्तर श्रेढियों के योग हों जिन के प्रथम पद क्रमशः १, २, ३... ...स हैं और साधारण निष्पत्तियां क्रमशः $\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}$ ...... $\frac{१}{स+१}$ हों तो दिखाओ कि

$$यो_१ + यो_२ + यो_३ + \ldots + यो_स = \frac{स}{२}(स + ३)$$

[बम्बई

(१०) $[३ \times ३^{\frac{१}{३}} \times ३^{\frac{१}{९}} \times ३^{\frac{१}{२७}} \times ३^{\frac{१}{८१}} \times \ldots$ अनन्ती तक$]$ की अर्हा निकालो।

छठा अध्याय

हरात्मक श्रेढी

(harmonical progression)

६.१ यदि $\frac{क}{ग} = \frac{क-ख}{ख-ग}$ तो क, ख, ग राशियां हरात्मक श्रेढी में रहती हैं।

यदि किसी श्रेढी की कोई भी तीन अनुगामी राशियां हरात्मक श्रेढी में हों, तो वह हरात्मक श्रेढी कहलाती है।

६.२ हरात्मक श्रेढी में रहने वाली राशियों के व्युत्क्रम (reciprocal) समान्तर श्रेढी में रहते हैं।

अब हरात्मक श्रेढी में रहने वाली क, ख, और ग इन तीन राशियों पर विचार करो।

परिभाषानुसार

$$\frac{क}{ग} = \frac{क-ख}{ख-ग}$$

अर्थात् क (ख − ग) = ग (क − ख)

इस समीकार का क×ख×ग से भाजन करने पर

$$\frac{१}{ग}-\frac{१}{ख}=\frac{१}{ख}-\frac{१}{क}$$

किन्तु यह $\frac{१}{क}, \frac{१}{ख}, \frac{१}{ग}$ के समान्तर श्रेढी में रहने के लिए प्रतिबंध है।

६२१ हरात्मक मध्यक (harmonic mean)— यदि क, म, ख हरात्मक श्रेढी में हों तो म को क और ख के बीच का हरात्मक मध्यक कहते हैं। अथवा

क तथा ख के बीच में म का निवेश करने पर यदि क, म, ख हरात्मक श्रेढी में रहते हों तो म, क और ख के बीच का हरात्मक मध्यक कहलाता है।

६२२ यदि क, म, ख हरात्मक श्रेढी में हों तो म की अर्हा, क तथा ख के पदों में निकालना।

क्योंकि क, म, ख हरात्मक श्रेढी में हैं
इसलिए

$\frac{१}{क}, \frac{१}{म}, \frac{१}{ख}$ समान्तर श्रेढी में होंगे।

$$\therefore \frac{१}{म}-\frac{१}{क}=\frac{१}{ख}-\frac{१}{म}$$

अथवा $\frac{२}{म}=\frac{१}{क}+\frac{१}{ख}$

$$म = \frac{२ क ख}{क + ख}$$

अतः किन्हीं दो राशियों के बीच का हरात्मक मध्यक उनके दुगने गुणनफल को, उनके योग से भाजन करने पर प्राप्त होने वाली लब्धि के सम होता है।

६.२३ अनेक हरात्मक मध्यक—यदि क और ख के बीच में $म_१$, $म_२$,... और $म_स$ का निवेश करने पर क, $म_१$, $म_२$..... $म_स$, ख हरात्मक श्रेढी में रहते हों तो $म_१$, $म_२$,... $म_स$, क तथा ख के हरात्मक मध्यक कहलाते हैं।

उदाहरणः— ३ तथा २४ के बीच में ६ हरात्मक मध्यक का निवेश करो।

मान लो $म_१$, $म_२$,...... $म_६$ अपेक्षित मध्यक हैं। अतः परिभाषानुसार ३, $म_१$, $म_२$.......$म_६$, २४ हरात्मक श्रेढी में होंगे। यह ८ पदों की हरात्मक श्रेढी है।

$\therefore \frac{१}{३}, \frac{१}{म_१}, \frac{१}{म_२}, ... \frac{१}{म_६}, \frac{१}{२४}$ ये ८ पद समान्तर श्रेढी में रहेंगे। इस समान्तर श्रेढी का पहला पद $\frac{१}{३}$ है और ८वाँ पद $\frac{१}{२४}$ है। यदि प्रचय च हो तो

$$\frac{१}{२४} = \frac{१}{३} + ७ च$$

$$\frac{१}{२४} - \frac{१}{३} = ७च$$

अथवा $व = -\frac{१}{२४}$

अतः $\frac{१}{म_१}, \frac{१}{म_२}, \frac{१}{म_३} \ldots \frac{१}{म_६}$ क्रमशः

$\frac{७}{२४}, \frac{६}{२४}, \frac{५}{२४}, \ldots \frac{२}{२४}$ हैं।

अतः अपेक्षित मध्यक $म_१, म_२, म_३ \ldots म_६$

क्रमशः $\frac{२४}{७}, ४, \frac{२४}{५}, \ldots १२$ हैं।

६.२४ यह ध्यान रखना चाहिए कि हरात्मक श्रेढी में स पदों के योग के लिए कोई सूत्र नहीं है। किसी विशेष दशा में स पदों का योग वास्तविक संकलन से प्राप्त होता है।

६.३ दो धन राशियों बीच समान्तर, गुणोत्तर और हरात्मक मध्यक स्वयं गुणोत्तर श्रेढी में रहते हैं और वे महत्ता के अवरोही (*descending*) क्रम में होते हैं।

मान लो क और ख के बीच के सा, गा, हा ये क्रमशः समान्तर, गुणोत्तर और हरात्मक मध्यक हैं।

अतः मध्यकों की परिभाषानुसार

$$सा = \frac{क + ख}{२}$$

$$गा = \sqrt{कख}$$

$$हा = \frac{२कख}{क+ख}$$

(अ) $$सा \times हा = \frac{क+ख}{२} \times \frac{२ कख}{क+ख}$$

$$= कख$$

$$(\sqrt{कख})^२$$

$$= गा^२$$

अतः सा, गा, हा गुणोत्तर श्रेढी में हैं और गा, सा तथा हा के बीच का गुणोत्तर मध्यक है।

(आ) (सा − गा) पर विचार करो

$$सा - गा = \frac{क+ख}{२} - \sqrt{क}\sqrt{ख}$$

$$= \frac{क+ख-२\sqrt{क}\sqrt{ख}}{२}$$

$$= \frac{[\sqrt{क}-\sqrt{ख}]^२}{२}$$

क और ख घन राशियां होने के कारण $\sqrt{क}$ और $\sqrt{ख}$ वास्तविक हैं।

अतः $(\sqrt{क}-\sqrt{ख})$ भी वास्तविक है

अतः $(\sqrt{क}-\sqrt{ख})^२$ सदैव घन रहता है।

$\therefore$ सा > गा

अर्थात् किन्हीं भी दो राशियों के बीच का समान्तर

मध्यक उनके गुणोत्तर मध्यक से बड़ा होता है।

अब 'गा', सा और हा के बीच में का गुणोत्तर मध्यक है इसलिये वह सा और हा के बीच में ही होना चाहिए। यह उपपादित किया जा चुका है कि सा $>$ गा

अतः गा $>$ हा। अर्थात् किन्हीं दो धन राशियों के बीच के समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक मध्यक, महत्ता के अवरोही क्रम में होते हैं।

उदाहरण— यदि य, र, ल, हरात्मक श्रेढी में हों तो य, य−ल, य−र और ल, ल−य, ल−र भी हरात्मक श्रेढी में रहेंगे।

मान लो य, य−ल, य−र हरात्मक श्रेढी में हैं। हरात्मक श्रेढी की परिभाषानुसार

$$\frac{\text{य}}{\text{य}-\text{र}} = \frac{\text{य}-(\text{य}-\text{ल})}{\text{य}-\text{ल}-(\text{य}-\text{र})}$$

$$\frac{\text{य}}{\text{य}-\text{र}} = \frac{\text{ल}}{\text{र}-\text{ल}}$$

अर्थात् $\frac{\text{य}}{\text{ल}} = \frac{\text{य}-\text{र}}{\text{र}-\text{ल}}$

यह य, र, ल के हरात्मक श्रेढी में रहने के लिए प्रतिबन्ध है। किन्तु य, र, ल हरात्मक श्रेढी में हैं। अतः यह धारणा कि य, य−ल, य−र हरात्मक श्रेढी में है सत्य है।

इसी प्रकार ल, ल−य, ल−र हरात्मक श्रेढी में हैं यह भी उपपादित किया जा सकता है।

प्रश्नावलि ७

(१) (क) $\frac{१}{४}$ और $\frac{१}{३२३}$ के बीच में ४ हरात्मक मध्यकों का निवेश करो।

(ख) ४ और २ के बीच में ३ हरात्मक मध्यकों का निवेश करो।

(ग) १ और ३० के बीच में ४ हरात्मक मध्यकों का निवेश करो।

(घ) १½ और $\frac{६}{२३}$ के बीच में ५ हरात्मक मध्यकों का निवेश करो।

(२) किसी हरात्मक श्रेढी में रहने वाले तीन अनुगामी पदों का योग $\frac{४७}{६०}$ है और प्रथम पद $\frac{१}{३}$ है। श्रेढी निकालो।

(३) जिसका प्रथम पद क है, अन्त पद ग है और जिस के पदों की संख्या स है ऐसी हरात्मक श्रेढी का नवाँ पद निकालो। [मद्रास

(४) यदि किसी हरात्मक श्रेढी का तवाँ पद थ हो और थवाँ पद त हो तो सिद्ध करो कि नवाँ पद $\frac{त \times थ}{न}$ है [इलाहाबाद

(५) यदि किसी हरात्मक श्रेढी का तवां पद थ हो और थवां पद त हो तो सिद्ध करो कि (त+थ)वां $\frac{\text{त} \times \text{थ}}{\text{त} + \text{थ}}$ है।

(६) यदि किसी हरात्मक श्रेढी का तवां, थवां, दवां पद क्रमशः क, ख, ग हो तो सिद्ध करो कि
(थ − द)ख ग + (द − त)क ग + (त − थ)क ख = ०
[बम्बई

(७) यदि र − य तथा र − ल के बीच का हरात्मक मध्यक २(र − क) हो तो सिद्ध करो कि (य − क), (र − क), (ल — क) गुणोत्तर श्रेढी में हैं।
[इलाहाबाद १८९०

(८) दो संख्याओं के बीच का हरात्मक मध्यक १४$\frac{२}{५}$ और गुणोत्तर मध्यक २४ है। संख्याएं निकालो।

(९) दो संख्याओं का समान्तर मध्यक, उनके गुणोत्तर मध्यक से $\frac{३}{२}$ अधिक है और गुणोत्तर मध्यक हरात्मक मध्यक से $\frac{६}{५}$ अधिक है। संख्याएं निकालो।
[कलकत्ता

(१०) यदि दो संख्याओं के बीच के समान्तर मध्यक $\text{य}_1, \text{य}_2$, हरात्मक मध्यक $\text{र}_1, \text{र}_2$ और गुणोत्तर मध्यक $\text{ल}_1, \text{ल}_2$ हों तो दिखाओ कि
$\text{य}_1\text{र}_2 = \text{य}_2\text{र}_1 = \text{ल}_1 . \text{ल}_2$ ।

(११) यदि क, और ख इन दो संख्याओं के बीच में दो समान्तर मध्यक $\text{सा}_1, \text{सा}_2$, दो गुणोत्तर, मध्यक

गा$_1$, गा$_2$, और दो हरात्मक मध्यक हा$_1$, हा$_2$ का निवेश किया जाय तो तो दिखाओ कि

$$\frac{\text{गा}_1\text{गा}_2}{\text{हा}_1\text{हा}_2} = \frac{\text{सा}_1 + \text{सा}_2}{\text{हा}_1 + \text{हा}_2}$$ [नागपुर १९४५

(१२) किसी सामान्तर श्रेढी में और किसी हरात्मक श्रेढी में प्रथम पद, अन्त पद और पदों की संख्या एकही है। सिद्ध करो कि एक श्रेढी के आदि से नवें पद का और दूसरा श्रेढी के अन्त से नवें पदका गुणनफल न से स्वतंत्र है।

(१३) यदि त, थ, द, समान्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{थद}}{\text{तथ} + \text{तद}}, \quad \frac{\text{दत}}{\text{तथ} + \text{थद}}, \quad \frac{\text{तथ}}{\text{दत} + \text{दथ}}$$

हरात्मक श्रेढी में हैं। [नागपुर १९३९.

(१४) यदि $\text{क}^{\text{य}} = \text{ख}^{\text{र}} = \text{ग}^{\text{ल}}$ और क, ख, ग गुणोत्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि य, र, ल हरात्मक श्रेढी में हैं।

(१५) यदि य, र, ल हरात्मक श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{य}}{\text{र} + \text{ल} - \text{य}}, \quad \frac{\text{र}}{\text{ल} + \text{य} - \text{र}}, \quad \frac{\text{ल}}{\text{य} + \text{र} - \text{ल}}$$ हरात्मक श्रेढी में हैं।

(१६) यदि क$_1$, क$_2$, क$_3$, क$_4$, हरात्मक श्रेढी में हों तो

सिद्ध करो कि $\frac{\text{क}_1}{\text{क}_2 + \text{क}_3 + \text{क}_4}$, $\frac{\text{क}_2}{\text{क}_1 + \text{क}_3 + \text{क}_4}$,

$\frac{क_3}{क_4 + क_1 + क_2}$, $\frac{क_4}{क_1 + क_2 + क_3}$ हरात्मक श्रेढी में हैं।

(१७) यदि क, ख, ग समान्तर श्रेढी में हों, य, र, ल हरात्मक श्रेढी में हों और यदि $\frac{य}{ल} + \frac{ल}{य} = \frac{क}{ग} + \frac{ग}{क}$ तो सिद्ध करो कि कय, खर, गल गुणोत्तर श्रेढी में हैं।
[कलकत्ता

(१८) यदि य, र, ल क्रमशः कग, कख; कख, खग; खग, गक के बीच के गुणोत्तर मध्यक हों तो सिद्ध करो कि यदि क, ख, ग समान्तर श्रेढी में हों तो $य^2$, $र^2$, $ल^2$ भी समान्तर श्रेढी में होंगे और र+ल, ल+य, य+र हरात्मक श्रेढी में होंगे [मद्रास १८९०

६.५ प्राकृतिक संख्याएं (natural numbers)—१, २, ३,......स...... ये प्राकृतिक संख्याएं कहलाती हैं।

६.५१ प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं का योग निकालना। १, २, ३, ४,......स ये संख्याएं समान्तर श्रेढी में हैं जिसमें प्रचय १ है। अतः इन सब संख्याओं का योग, इस समान्तर श्रेढी के स पदों के योग के सम है।

अतः $योग_स = \frac{स}{२}[२ + (स-१)१]$

$$= \frac{स}{२}(स+१)$$

अतः प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं का योग $\frac{स(स+१)}{२}$ के सम है

६.५२ प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग निकालना—

यदि अपेक्षित योग का $यो_स$ से अभिधान किया जाय तो

$$यो_स = १^२ + २^२ + ३^२ + \ldots\ldots + स^२$$

अब $स^३ - (स-१)^३ \equiv ३स^२ - ३स + १$

इस ऐकात्म्य में स की १ और उससे आगे की अर्हाओं का आदेश करने से

$$
\begin{array}{llll}
१^३ - ०^३ & = ३ \times १^२ & - ३ \times १ & + १ \\
२^३ - १^३ & = ३ \times २^२ & - ३ \times २ & + १ \\
३^३ - २^३ & = ३ \times २^२ & - ३ \times ३ & + १ \\
\ldots\ldots & & & \\
\ldots\ldots & & & \\
\ldots\ldots & & & \\
(स-२)^३ - (स-३)^३ & = ३(स-२)^२ & - ३(स-२) & + १ \\
(स-१)^३ - (स-२)^३ & = ३(स-१)^२ & - ३(स-१) & + १ \\
स^३ - (स-१)^३ & = ३स^२ & - ३स & + १
\end{array}
$$

इन समीकारों का स्तम्भानुसार योग करने से

$$स^३ = ३[१^२ + २^२ + ३^२ + \ldots + स^२] - ३[१ + २ + ३ + \ldots + स] + स$$

$$= ३यो_स - ३\frac{स(स+१)}{२} + स$$

$$\therefore ३यो_स = स^३ + \frac{३स(स+१)}{२} - स$$

$$= स(स+१)\left(स - १ + \frac{३}{२}\right)$$

$$= \frac{स(स+१)(२स+१)}{२}$$

$$\therefore यो_स = \frac{स(स+१)(२स+१)}{६}$$

६.५३ प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग निकालना—यदि अपेक्षित योग का $यो_स$ से अभिधान किया जाय तो

$$यो_स = १^३ + २^३ + ३^३ + \ldots\ldots + स^३$$

अब यह ज्ञात है कि

$$स^४ - (स-१)^४ = ४स^३ - ६स^२ + ४स - १$$

$$(स-१)^४ - (स-२)^४ = ४(स-१)^३ - ६(स-१)^२ + ४(स-१) - १$$

$$(स-२)^४ - (स-३)^४ = ४(स-२)^३ - ६(स-२)^२ + ४(स-२) - १$$

....

....

$३^४ - २^४ = ४ \times ३^३ - ६ \times ३^२ + ४ \times ३ - १$

$२^४ - १^४ = ४ \times २^३ - ६ \times ३^२ + ४ \times २ - १$

$१^४ - ०^४ = ४ \times १^३ - ६ \times १^२ + ४ \times १ - १$

इन सब ऐकात्म्यों के वाम पक्षों का स्तम्भानुसार योग
≡ उनके दक्षिण पक्षों का स्तम्भानुसार योग

$$\therefore स^४ = ४(१^३ + २^३ + ३^३ + \ldots + स^३) - ६(१^२ + २^२ + ३^२ + \ldots + स^२) + ४(१ + २ + ३ + \ldots + स) - स$$

$$स^४ = ४यो_स - ६(१^२ + २^२ + ३^२ + \ldots + स^२) + ४(१ + २ + ३ + \ldots + स) - स$$

$$= ४यो_स - ६\frac{स(स+१)\ (२स+१)}{६} + \frac{४स(स+१)}{२} - स$$

$$\therefore ४यो_स = स^४ + स + स\ (स+१)\ (२स+१) - २स\ (स+१)$$

$$= स\ (स+१)\ [स^२ - स + १ + २स + १ - २]$$

$$= स\ (स+१)\ (स^२ + स)$$

$$\therefore\ \ यो_स = \frac{स^२\ (स+१)]^२}{४}$$

$$= \frac{[स\ (स+१)]^२}{२}$$

अतः प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के योग का वर्ग होता है।

६.६ य संकेतना [Σ notation]— किसी भी श्रेढी का सामान्य पद उसी पद की संख्या का फलन होता है। अतः यह पद और पद-संख्या ज्ञात हो तो श्रेढी इस रूप में लिखी जा सकती है—

उदाहरण—

(१) $१+२+३+\ldots+(स-१)+स = \underset{ध=१}{\overset{ध=स}{य}} ध$

(२) $\frac{१}{२}+\frac{१}{६}+\frac{१}{१८}+\ldots+\frac{१}{२.३^{स-२}}+\frac{१}{२.३^{स-१}}$

$$= \underset{ध=१}{\overset{ध=स}{य}} \frac{१}{२\times ३^{ध-१}}$$

(३) $क+(क+च)+(क+२च)+\ldots\ldots क+स-२च)$

$$+(क+स-१च) = \underset{ध=१}{\overset{ध=स}{य}} [क+(ध-१)च]$$

य संकेतना दत्त श्रेढी के सामान्य पद के पहले रखी जाती है और वह सामान्य पद से दिखाए गए प्ररूप पदों के योग का काम देती है।

सुतथ्यता के लिए योग करण आरम्भ करने वाले पद की

संख्या संकेतना के नीचे और योग करण के अन्तिम पद की संख्या संकेतना के ऊपर रखी जाती है।

अतः $\sum_{ध=१}^{स}$ ध² का निर्वचन (interpretation) इस प्रकार है— ध² रूप वाले सामान्य पद में ध को १ से स तक अर्हांक देने पर प्राप्त होने वाली श्रेढी का योग निकालना अभीष्ट है।

६.७ कुछ साधित उदाहरण—

उदाहरण १— क, क+च, क+२च, ... इस श्रेढी के प्रथम स पदों के वर्गों का योग निकालो।

अपेक्षित योग का यो से अभिधान करने पर आगे लिखो समता में दक्षिण पक्ष की अर्हा ज्ञात करनी है।

$$यो = क^2 + (क+च)^2 + (क+२च)^2 + \ldots [क+(स-१)च]^2$$

इस श्रेढी के सामान्य पद पर विचार करो।

$$सामान्य\ पद\ प_ध = [क + (ध-१)च]^2$$

$$= क^2 + च^2(ध-१)^2 + २क \times च(ध-१)$$

∴ अपेक्षित योग

$$यो = \sum_{ध=१}^{स} प_ध$$

$$= \sum_{ध=१}^{स} [क + (ध-१)च]^2$$

$$= \sum_{घ=1}^{घ=म} [क^2 + च^2(घ-1)^2 + 2कच(घ-1)]$$

$$= \sum_{घ=1}^{घ=म} क^2 + च^2 \sum_{घ=1}^{घ=म} (घ-1)^2 + 2कच \times \sum_{घ=1}^{घ=म} (घ-1)$$

$$= सक^2 + च^2 \frac{स(स-1)(2स-1)}{6} + 2कच \frac{स(स-1)}{2}$$

$$= सक^2 + च^2 \frac{स(स-1)(2स-1)}{6} + कचस(स-1)$$

उदाहरण २— $1 \times 3 \times 5 + 2 \times 5 \times 8 + 3 \times 7 \times 11 + \ldots\ldots$

इस श्रेढी क स पदों का योग निकालो।

इस श्रेढी का $स^{वाँ}$ पद $स(2स+1)(3स+2)$ के सम है। यह पदों का अवलोकन करने पर सरलता से ज्ञात हो जायगा।

$\therefore प_स = 6 \times स^3 + 7 \times स^2 + 2स$

स को १ तथा १ से स तक अर्घांए देने पर

$प_1 = 6 \times 1^3 + 7 \times 1^2 + 2 \times 1$

$$प_२ = ६ \times २^३ + ७ \times २^२ + २ \times २$$

....

....

....

$$प_स = ६ \times स^३ + ७ \times स^२ + २ \times स$$

इन समीकारों के दोनों पक्षों का योग करने से

$$प_१ + प_२ + प_३ + \ldots\ldots + प_स$$

$$= ६(१^३ + २^३ + ३^३ + \ldots\ldots + स^३)$$

$$+ ७(१^२ + २^२ + \ldots + स^२)$$

$$+ २[१ + २ + ३ + \ldots + स]$$

$$यो = ६\left[\frac{(स)(स+१)}{२}\right]^२ + ७\frac{स(स+१)(२स+१)}{६} + \frac{२स(स+१)}{२}$$

$$= \frac{३}{२}(स^२ + स)^२ + \frac{७}{६}\left[स(स+१)(२स+१)\right] + स(स+१)$$

$$= \frac{स(स+१)}{६}[९स^२ + ९स + १४स + ७ + ६]$$

$$= \frac{स(स+१)(९स^२ + २३स + १३)}{६}$$

उदाहरण ३—

५+५५+५५५+ .... इस श्रेढी के स पदों का

योग निकालो।

अपेक्षित योग का यो से अभिधान करने पर

$$यो = ५ + ५५ + ५५५ + \ldots\ldots स\ पदों\ तक$$
$$= ५ [१ + ११ + १११ + \ldots\ldots स\ पदों\ तक]$$

दोनों पक्षों का ९ से गुणन करने पर

$$९\ यो = ५ [९ + ९९ + ९९९ + \ldots\ldots स\ पदों\ तक]$$
$$= ५ [(१० - १) + (१०^२ - १) + (१०^३ - १) + \ldots\ldots स\ पदों\ तक]$$
$$= ५\ [१० + १०^२ + १०^३ + \ldots + १०^स - स]$$
$$= ५ \times \frac{१० (१०^स - १)}{९} - ५ स$$
$$= \frac{५०}{९} (१०^स - १) - ५स$$
$$\therefore यो = \frac{५०}{८१} (१०^स - १) - \frac{५ स}{९}$$

अतः अपेक्षित योग $\frac{५० (१०^स - १)}{८१} - \frac{५ स}{९}$ है।

उदाहरण ४—

$१^२ + (१^२ + २^२) + (१^२ + २^२ + ३^२) + \ldots\ldots$ इस श्रेढी का स अभिज्ञारों तक योग निकालो।

दत्त श्रेढी का घ^वां पद

$$प_घ = १^२ + २^२ + ३^२ + \ldots\ldots + घ^२$$

$$= \frac{\text{घ}\,(\text{घ}+१)\,(२\,\text{घ}+१)}{६}$$

अर्थात् $\text{प}_{\text{घ}} = \frac{१}{६}\left[२\,\text{घ}^{३}+३\,\text{घ}^{२}+\text{घ}\right]$

∴ अपेक्षित योग

$$\text{यो} = \sum_{\text{घ}=१}^{\text{घ}=\text{स}} \text{प}_{\text{घ}}$$

$$= \sum_{\text{घ}=१}^{\text{घ}=\text{स}} \frac{१}{६}\left[२\,\text{घ}^{३}+३\,\text{घ}^{२}+\text{घ}\right]$$

$$= \sum_{\text{घ}=१}^{\text{घ}=\text{स}} \frac{१}{३}\,\text{घ}^{३} + \sum_{\text{घ}=१}^{\text{घ}=\text{स}} \frac{१}{२}\,\text{घ}^{२} + \sum_{\text{घ}=१}^{\text{घ}=\text{स}} \frac{१}{६}\,\text{घ}$$

$$= \frac{१}{३}\sum_{\text{घ}=१}^{\text{घ}=\text{स}} \text{घ}^{३} + \frac{१}{२}\sum_{\text{घ}=१}^{\text{घ}=\text{स}} \text{घ}^{२} + \frac{१}{६}\sum_{\text{घ}=१}^{\text{घ}=\text{स}} \text{घ}$$

$$= \frac{१}{३}\left[\frac{\text{स}\,(\text{स}+१)}{२}\right]^{२} + \frac{१}{२}\,\frac{\text{स}\,(\text{स}+१)\,(२\text{स}+१)}{६} + \frac{१}{६}\,\frac{\text{स}\,(\text{स}+१)}{२}$$

$$= \frac{\text{स}^{२}\,(\text{स}+१)^{२}}{१२} + \frac{\text{स}\,(\text{स}+१)\,(२\,\text{स}+१)}{१२} + \frac{\text{स}\,(\text{स}+१)}{१२}$$

$$= \frac{\text{स}(\text{स}+१)}{१२}\left[\text{स}(\text{स}+१)+(२\text{स}+१)+१\right]$$

$$= \frac{\text{स}(\text{स}+१)}{१२}(\text{स}^{२}+३\text{स}+२)$$

$$= \frac{\text{स}(\text{स}+१)(\text{स}+१)(\text{स}+२)}{१२}$$

$$= \frac{\text{स}(\text{स}+१)^{२}(\text{स}+२)}{१२}$$

प्रश्नावलि ८

(१) इन श्रेढियों के स पदों का योग निकालो—

(क) $२^{२}+४^{२}+६^{२}+८^{२}+......$

(ख) $१^{२}+३^{२}+५^{२}+७^{२}+......$

(ग) $५\times१^{२}+६\times२^{२}+७\times३^{२}+......$

(घ) $२\times१^{२}+३\times२^{२}+४\times३^{२}+......$

(च) $२^{२}+५^{२}+८^{२}+......$

(छ) $१^{३}+३^{३}+५^{३}+......$

(ज) $१^{२}-२^{२}+३^{२}-४^{२}+५^{२}-६^{२}+......$

(२) यह दिखाओ कि आवश्यक रूप से १ से प्रारंभ न होनेवाले अनुगामी पूर्णांकों की किसी संख्या के घनों का योग, पूर्णांकों के योग से भाज्य है।

(३) इन श्रेढियों में स$^{\text{वाँ}}$ पद और स पदों का योग निकालो।

(क) $२+५+१०+१७+\ldots\ldots$ [कलकत्ता

(ख) $२+७+१४+२३+\ldots\ldots$ [बम्बई

(ग) $२+६+१४+३०+\ldots\ldots$ [कलकत्ता

(४) यदि $यो_१ = १+२+३+\ldots+स$ और

$यो_२ = १^२+२^२+३^२+\ldots+स^२$ तो दिखाओ

कि $३यो_२ + ३यो_१ + (स+१) = (स+१)^३$

[कलकत्ता

(५) इन श्रेढियों के स पदों का योग निकालो—

(क) $१\times२ + २\times३ + ३\times४ + \ldots\ldots\ldots$

(ख) $२\times३ + ३\times५ + ४\times७ + \ldots\ \ldots$

(ग) $१\times३\times४ + २\times५\times७ + ३\times७\times१० + \ldots$

(घ) $१\times१ + २(१+२) + ३ १+२+३) + \ldots$

(ङ) $१^२\times३ + २^२\times४ + ३^२\times५ + \ldots$

(च) $१^२ + (१^२+३^२) + (१^२+३^२+५^२) + \ldots$

(छ) $(१^२+३^२) + (१^२+३^२+५^२+७^२)$
$+(१^२+३^२+५^२+७^२+९^२+११^२)+\ldots$

(ज) $\frac{१^३}{१}+\frac{१^३+२^३}{२}+\frac{१^३+२^३+३^३}{३}+\ldots\ldots$

(झ) $(स-१)१ + (स-२)२ + (स-३)३ + \ldots$

(ञ) $१\times स^२ + २(स-१)^२ + ३(स-२)^२ + \ldots\ldots$
$+ स(१)^२$

(६) इन श्रेढियों का स पदोंतक योग निकालो—

(क) ९+९९+९९९+......

(ख) ३+३३+३३३+......

(ग) ६+६६+६६६+......

सातवां अध्याय

द्विघात समीकार

(quadratio equation)

७.१ एक अज्ञात राशि के समीकार में यदि अज्ञात का उच्चतम घात दो हो तो उस समीकार को उस अज्ञात का द्विघात-समीकार कहते हैं।

उदाहरणार्थ कय^2 + खय + ग = ० यह, अज्ञात य का द्विघात-समीकार है जिसमें क, ख, ग ये अचल हैं। य से स्वतन्त्र पद ग, समीकार का अचल पद कहलाता है।

७.१२ द्विघात-समीकार का साधन— मान लो दत्त द्विघात-समीकार कय^2 + खय + ग = ० है, जिसमें क, ख, ग ज्ञात राशियां हैं।

दत्त समीकार का य^2 के गुणक क से आदि से अन्त तक भाजन करने पर समीकार का रूपान्तर

$$\text{य}^2 + \frac{\text{ख}}{\text{क}}\text{य} + \frac{\text{ग}}{\text{क}} = 0 \text{ में होता है।}$$

अब वाम पक्ष में $\frac{ख^2}{4क^2}$ अर्थात् य के आधे गुणक का वर्ग जोड़ो और घटाओ। उपर्युक्त व्यवस्थापन करने से यह फल प्राप्त होता है।

$$\left(य+\frac{ख}{2क}\right)^2=\frac{ख^2-4कग}{4क^2}$$

$$\therefore य+\frac{ख}{2क}=\pm\frac{\sqrt{ख^2-4कग}}{\sqrt{4क^2}}$$

[वर्गमूल निस्सारण करने पर

$$अथवा\ य=\frac{-ख\pm\sqrt{ख^2-4कग}}{2क}$$ [$\frac{ख}{2क}$ का पक्षान्तरण करने पर

क, ख, ग के पदों में व्यक्त, य की इन दो अर्हाओं से दत्त समीकार का समाधान होता है। ये समीकार के मूल कहलाते हैं।

७.२ साध्य— किसी भी द्विघात समीकार के दो से अधिक मूल नहीं होते।

पिछले अनुच्छेद में यह देखा जा चुका है कि

$कय^2+खय+ग=0$ के समान द्विघात समीकार का समाधान करने वाले दो मूल प्राप्त होते हैं।

यदि संभव हो तो मान लो कि द्विघात समीकार

$कय^2+खय+ग=0$ के तीन भिन्न मूल अ, आ और इ हैं।

प्रत्येक मूल से समीकार का समाधान होना चाहिए इसलिए

$$\text{क अ}^2 + \text{ख अ} + \text{ग} = 0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\text{क आ}^2 + \text{ख आ} + \text{ग} = 0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\text{क इ}^2 + \text{ख इ} + \text{ग} = 0 \qquad \ldots\ldots(3)$$

(१) में से (२) घटाने पर

$$\text{क}(\text{अ}^2 - \text{आ}^2) + \text{ख}(\text{अ} - \text{आ}) = 0$$

(अ − आ) से इसका भाजन करो, जो अ $\neq$ आ के कारण उपकल्पनानुसार शून्य नहीं है।

$$\therefore \text{क}(\text{अ} + \text{आ}) + \text{ख} = 0 \qquad \ldots\ldots(4)$$

इसी प्रकार (२) तथा (३) से

$$\text{क}(\text{आ} + \text{इ}) + \text{ख} = 0 \qquad \ldots\ldots(5)$$

प्राप्त होगा। अब (५) को (४) में से घटाने पर

$$\text{क}(\text{अ} - \text{इ}) = 0 \qquad \ldots\ldots(6)$$

अब (६) जैसी दशा के लिये क = ० अथवा अ − इ = ० अर्थात् अ = इ होना चाहिए। ये दोनो फल उपकल्पना के विरुद्ध हैं क्योंकि क = ० होने से समीकार के घात का प्रहसन होता है और अ $\neq$ इ।

अतः 'द्विघात-समीकार के तीन मूल हैं' यह कल्पना असंगत है।

अतः द्विघात-समीकार के दो से अधिक मूल नहीं हो सकते।

उदाहरण १— $\text{य}^2 - \text{य} - 6 = 0$ का साधन करो।

यहां क = १, ख = −१, ग = −६

$$\text{अतः} \quad \frac{1 + \sqrt{1 + 25}}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{1 + 24}}{2}$$

ये दो अर्हाएं हैं।

$\therefore$ य = ३ अथवा −२

उदाहरण २— २य² − ३य − ३ = ० इस द्विघात समीकार का साधन करो।

$$य = \frac{३ \pm \sqrt{९ + २४}}{४}$$

$$= \frac{३ \pm \sqrt{३३}}{४}$$

७.२१ द्विघात-समीकार के मूलों का पर्यालोचन— अ तथा आ से द्विघात समीकार कय² + खय + ग = ० के मूलों का अभिधान करने पर

$$अ = \frac{-ख + \sqrt{ख^{२} - ४कग}}{२क}$$

$$आ = \frac{-ख - \sqrt{ख^{२} - ४कग}}{२क}$$ यह लिखा जा सकता है

वरणी चिह्न के नीचे की राशि (ख² − ४कग) का विचार करने पर ये दशाएं संभव हैं।

(१) यदि (ख² − ४कग) यह राशि धन हो तो इसका वर्गमूल निकाला जा सकता है।

(ई) यदि (ख² − ४कग) पूर्ण वर्ग हो तो समीकार के मूल वास्तविक, परिमेय और भिन्न होंगे।

(ई) यदि (ख² − ४कग) धन राशि हो परन्तु पूर्ण वर्ग

न हो तो समीकार के मूल वास्तविक, अपरिमेय और भिन्न होंगे।

(२) यदि $ख^2 - ४कग = ०$ तो प्रत्येक मूल $-\frac{ख}{२क}$ के सम होगा। अतः इस दशा में मूल वास्तविक और समान होंगे।

(३) यदि $ख^2 - ४कग$ ऋण हों तो इसका वर्गमूल काल्पनिक होगा। इस दशा में दोनों मूल संकर अथवा काल्पनिक होंगे।

इन फलों का सारांश यह है—

$ख^2 \gtreqless ४कग$ के अनुसार $ख^2 - ४कग$ धन, शून्य अथवा ऋण होगा।

अतः यदि $ख^2 > ४कग$, तो मूल वास्तविक और असम होंगे।

यदि $ख^2 = ४कग$ तो मूल वास्तविक और समान होंगे।

यदि $ख^2 < ४कग$ तो मूल काल्पनिक अथवा संकर होंगे।

इन परीक्षाओं से, समीकार का साधन किए बिना मूलों के स्वरूप का निश्चय किया जा सकता है। अतः $(ख^2 - ४कग)$ को द्विघात-समीकार का विवेचक (discriminant) कहते हैं।

आलोक— विद्यार्थियों को यह ध्यानपूर्वक समझना चाहिए कि परिमेय और वास्तविक गुणकों वाले द्विघात

में अपरिमेय अथवा संकर मूल युग्मों में आते हैं।

उदाहरण १—दिखाओ कि समीकार $२\text{य}^२ - ३\text{य} + ५ = ०$ का समाधान य की वास्तविक अर्हाओं से नहीं होता।

इस समीकार में $\text{क} = २,\ \text{ख} = -३,\ \text{ग} = ५$

$$\text{अतः}\ \text{ख}^२ - ४\,\text{क}\,\text{ग} = ९ - ४ \times २ \times ५$$

$$= -३१$$

क्योंकि विवेचक ऋण है इसलिए समीकार के मूल संकर हैं। अतएव य की वास्तविक अर्हाओं से समीकार का समाधान नहीं होता।

७.३ द्विघात-समीकार के मूलों तथा गुणकों में सम्बन्ध—
यदि अ तथा आ $\text{क}\text{य}^२ + \text{ख}\text{य} + \text{ग} = ०$ के मूल हों तो

$$\text{अ} = \frac{-\text{ख} + \sqrt{\text{ख}^२ - ४\text{क}\text{ग}}}{२\text{क}} \quad \ldots\ldots(१)$$

$$\text{आ} = \frac{-\text{ख} - \sqrt{\text{ख}^२ - ४\text{क}\text{ग}}}{२\text{ख}} \quad \ldots\ldots(२)$$

(१) और (२) का योग करने से

$$\text{अ} + \text{आ} = \frac{-\text{ख} + \sqrt{\text{ख}^२ - ४\text{क}\text{ग}}}{२\text{क}} + \frac{-\text{ख} - \sqrt{\text{ख}^२ - ४\text{क}\text{ग}}}{२\text{क}}$$

$$= \frac{-\text{ख} + \sqrt{\text{ख}^२ - ४\text{क}\text{ग}} - \text{ख} - \sqrt{\text{ख}^२ - ४\text{क}\text{ग}}}{२\text{क}}$$

$$= \frac{-२\text{ख}}{२\text{क}}$$

$$= -\frac{ख}{क}$$

(१) और (२) का गुणन करने से

$$अ \times आ = \left[\frac{-ख + \sqrt{ख^२ - ४कग}}{२क}\right] \times \left[\frac{-ख - \sqrt{ख^२ - ४कग}}{२क}\right]$$

$$= \frac{ख^२}{४क^२} - \frac{ख^२ - ४कग}{४क^२}$$

$$= \frac{ख^२}{४क^२} - \frac{ख^२}{४क^२} + \frac{४कग}{४क^२}$$

$$= \frac{ग}{क}$$

अतः मूलों का योग $= -\frac{ख}{क}$

मूलों का गुणनफल $= \frac{ग}{क}$

७.३१ अन्यथा (aliter) यदि अ तथा आ समीकार के मूल हों तो (य − अ) और (य − आ) दी समीकार में वामपक्ष के खण्ड होने चाहिएं। अर्थात् (य − अ) (य − आ) के गुणनफल को शून्य के सम करने से जो समीकार प्राप्त होगा वह दत्त समीकार के समान होना चाहिए।

अतः (य − अ) (य − आ) = ०

अथवा $य^2 - (अ + आ) य + अ \times आ = 0$ ....(१)
किन्तु दत्त समीकार $कय^2 + खय + ग = 0$, क से भाजन करने पर इस प्रकार लिखा जा सकता है —

$$य^2 + \frac{ख}{क}य + \frac{ग}{क} = 0 \quad \text{.............................(२)}$$

समीकार (१) और (२) सर्वांग सम हैं।

दोनों में $य^2$ के गुणक समान हैं इसलिए दोनों में संवादी पदों के गुणक भी समान होने चाहिएं।

$$\text{अतः } अ + आ = -\frac{ख}{क}$$

$$अ \times आ = \frac{ग}{क}$$

जो फल पहिले ही प्राप्त किए गए हैं।

अतः यदि द्विघात समीकार में $य^2$ का गुणक एक हो तो —

(१) मूलों का योग य के गुणक के सम किन्तु विपरीत चिह्न का होता है।

और (२) मूलों का गुणनफल समीकार के अचल पद के सम होता है।

७.४ दत्त मूलों से समीकार बनाना—

मान लो अपेक्षित समीकार के मूल अ तथा आ हैं।

अतः य=अ और य=आ, इन अर्हाओं से अपेक्षित समीकार का समाधान होगा।

अर्थात् समीकार के वाम पक्ष की पदसंहति में (य − अ)

और (य − आ) खण्ड हैं।

अथवा समीकार का रूप

(य − अ) (य − आ) = ० होगा।

अथवा $य^२$ − (अ + आ) य + अ × आ = ०

अतः जिस समीकार के मूल दिए हों उसका रूप यह होता है—

$य^२$ − (मूलों का योग) य + (मूलों का गुणनफल) = ०

अब जिसके मूल दिए गए हों वह समीकार बनाया जा सकता है।

उदाहरण १—ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल २ तथा $-\frac{१}{२}$ हों।

अपेक्षित समीकार (य − २) $(य + \frac{१}{२})$ = ० है।

$$य^२ - \frac{३}{२}य - १ = ०$$

अथवा $२य^२ - ३य - २ = ०$

अथवा समीकार इस रीति से भी प्राप्त किया जा सकता है।

$$\text{मूलों का योग} = २ - \frac{१}{२} = \frac{३}{२}$$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = २\left(-\frac{१}{२}\right) = -१$$

∴ अपेक्षित समीकार

$$य^2 - \frac{3}{2} य - १ = 0$$

अथवा $२य^2 - ३य - २ = 0$ है।

यदि मूल अपरिमेय अथवा संकर हों तो दूसरी पद्धति अधिक उपयोगी होती है।

उदाहरण २— ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल $२ + \sqrt{३}$ और $२ - \sqrt{३}$ हों।

मूलों का योग $= २ + \sqrt{३} + २ - \sqrt{३}$
$= ४$

मूलों का गुणनफल $= (२ + \sqrt{३})(२ - \sqrt{३})$
$= ४ - ३$
$= १$

∴ $य^2 - ४य + १ = 0$ यह अपेक्षित समीकार है।

उदाहरण ३— ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल $-२ \pm ३श$ हों।

मूलों का योग $= [-२ + ३श] + [-२ - ३श]$
$= -४$

मूलों का गुणनफल $= (-२ + ३श)(-२ - ३श)$
$= ४ - ९श^2$
$= ४ + ९$ [∵ $श^2 = -१$
$= १३$

अतः $य^2 + ४य + १३ = 0$ यह अपेक्षित समीकार है।

७.५ एक के घनमूल (cube roots of unity)—

मान लो य एक का घनमूल है।

$\therefore$ य = $\sqrt[3]{१}$

अथवा $य^3 = १$

अतः $य^3 - १ = ०$ इस समीकार का साधन करना है।

$\therefore (य - १)(य^2 + य + १) = ०$

$\therefore य - १ = ०$, अर्थात् $य = १$

अथवा $य^2 + य + १ = ०$

अर्थात् $य = \frac{-१ \pm \sqrt{-३}}{२}$

अतः एक के घनमूल १, $\frac{-१ \pm \sqrt{-३}}{२}$ हैं

प्रत्यक्ष घात क्रिया (actual involution) से यहां दिखाया जा सकता है कि इनमें से प्रत्येक यहाँ घनित (cubed) करने पर एक क सम है। अतः एक के तीन घनमूल होते हैं जिनमें एक वास्तविक और दो संकर होते हैं।

यदि एक के काल्पनिक मूलों का अ तथा आ से अभिधान किया जाय तो अ तथा आ, $य^2 + य + १ = ०$ इस द्विघात समीकार के मूल होंगे।

अब अ $\times$ आ = १ ....(१)

(१) के दोनों पक्षों को $अ^2$ से गुणा करो।

$\therefore अ^3 \times आ = अ^2$

किन्तु अ एक का घनमूल है, इसलिये

$\therefore$ $अ^3 = १$

$\therefore$ $आ = अ^2$ ....(२)

इसी प्रकार यह दिखाया जा सकता है कि

$अ = आ^2$ ....(३)

(२) और (३) से यह ज्ञात होता है कि अ और आ एक दूसरे के वर्ग हैं। अतः एक के संकर घनमूल इस प्रकार के हैं कि वे एक दूसरे के वर्ग होते हैं। यह रूढ़ि है कि एक के घनमूलों का अभिधान १, ओ तथा $ओ^2$ से किया जाय।

क्योंकि $य^2 + य + १ = ०$ इस समीकार का समाधान ओ से होता है, इसलिए

$ओ^2 + ओ + १ = ०$ ....(४)

समीकार (४) यह बतलाता है कि एक के तीनों घनमूलों का योग शून्य के सम होता है।

पुनः ओ तथा $ओ^2$

$य^2 + य + १ = ०$ के मूल हैं

$\therefore$ $ओ \times ओ^2 = १$

अथवा $ओ^3 = १$

अतः ये फल प्राप्त होते हैं—

(१) एक के दोनों संकर घनमूलों का गुणनफल एक के सम होता है।

(२) $ओ^3$ का प्रत्येक पूर्णांक घात एक के सम होता है।

७.५१ यह जानना आवश्यक है कि ओ के उत्तरोत्तर

धन पूर्णांक घात १, ओ अथवा ओ^2 होते हैं।

क्योंकि यदि स ३ का अपवर्त्य (multiple) हो तो उसे ३ घ इस रूप का होना चाहिए जहां घ धन पूर्णांक है।

$$\therefore \quad [\text{ओ}]^{\text{स}} = [\text{ओ}]^{3\text{घ}} = [\text{ओ}^3]^{\text{घ}}$$
$$= 1$$

यदि स ३ का अपवर्त्य न हो तो उसे ३घ + १ अथवा ३ घ + २ के सम होना चाहिए।

यदि $\text{स} = 3\text{घ} + 1$ तो

$$(\text{ओ})^{\text{स}} = [\text{ओ}]^{3\text{घ}+1} = [\text{ओ}]^{3\text{घ}} \times \text{ओ}$$
$$= \text{ओ}$$

और यदि $\text{स} = 3\text{घ} + 2$ तो

$$[\text{ओ}]^{\text{स}} = [\text{ओ}]^{3\text{घ}+2} = [\text{ओ}]^{3\text{घ}} \times \text{ओ}^2$$
$$= \text{ओ}^2$$

उदाहरण १— $\text{क}^3 + \text{ख}^3$ का रेखीय खण्डीकरण करो।

$$\text{क}^3 + \text{ख}^3 = (\text{क} + \text{ख})(\text{क}^2 - \text{कख} + \text{ख}^2)$$
$$= (\text{क} + \text{ख})\,[\text{क}^2 + (\text{ओ} + \text{ओ}^2)\,\text{कख} + \text{ओ}^3\text{ख}^2]$$
$$[\because \text{ओ} + \text{ओ}^2 = -1 \text{ और } \text{ओ}^3 = 1$$
$$= (\text{क} + \text{ख})(\text{क} + \text{ओ ख})(\text{क} + \text{ओ}^2\text{ख})$$
$$\therefore \text{क}^3 + \text{ख}^3 = (\text{क} + \text{ख})(\text{क} + \text{ओ ख})(\text{क} + \text{ओ}^2\text{ख})$$

उदाहरण २— यदि १, ओ, ओ^2 एक के तीन घनमूल हों तो दिखाओ कि

$$[1 + \text{ओ}^2]^3 = -1$$

$$\text{अब } (१+\text{ओ}^२)^३ = १+\text{ओ}^६+३\text{ओ}^२ (१+\text{ओ}^२)$$
$$= १+\text{ओ}^६+३\text{ओ}^२+३\text{ओ}^४$$
$$= १+१+३\text{ओ}^२+३\text{ओ}$$
$$[\because \text{ओ}^३ = १$$
$$= २+३ (\text{ओ}^२+\text{ओ})$$
$$= २+३ (-१)$$
$$[\because \text{ओ}+\text{ओ}^२+१ = ०$$
$$= -१$$

अन्यथा इसका साधन इस प्रकार किया जा सकता है।

$$१+\text{ओ}+\text{ओ}^२ = ०$$
$$१+\text{ओ}^२ = -\text{ओ}$$
$$\text{अतः } (१+\text{ओ}^२)^३ = (-\text{ओ})^३$$
$$= -\text{ओ}^३$$
$$= -१$$

७.६ अनुच्छेद ७ ३ के फल महत्वपूर्ण हैं क्योंकि उनकी सहायता से दत्त द्विघात-समीकार के मूलों को धारण करने वाली पदसंहति की अर्हा निकाली जा सकती है। निम्नलिखित उदाहरण बोधात्मक हैं—

उदाहरण १— यदि अ तथा आ, $\text{य}^२ - \text{तय} + \text{थ} =$ ० के मूल हों तो इन पदसंहतियों की अर्हा त और थ के पदों में निकालो —

(१) $\text{अ}^२ + \text{अ} \times \text{आ} + \text{आ}^२$

(२) $\text{अ}^३ + \text{आ}^३$

(३) $अ^४ + आ^४$

इस समीकार में गुणकों और मूलों के सम्बन्ध ये हैं —

$$अ + आ = त$$

$$अ \times आ = थ$$

अब

(१) $अ^२ + अ \times आ + आ^२ = अ^२ + २अ \times आ + आ^२ - अ \times आ$

$$= (अ + आ)^२ - अ \times आ$$

$$= त^२ - थ$$

(२) $अ^३ + आ^३ = (अ + आ)\ (अ^२ - अ \times आ + आ^२)$

$$= [अ + आ][अ^२ + २अ \times आ + आ^२ - ३अ \times आ]$$

$$= [अ + आ]\ [(अ + आ)^२ - ३अ \times आ]$$

$$= त\ [त^२ - ३थ]$$

$$= त^३ - ३तथ$$

(३) $अ^४ + आ^४ = अ^४ + आ^४ + २अ^२ \times आ^२ - २अ^२आ^२$

$$= [अ^२ + आ^२]^२ - २अ^२ \times आ^२$$

$$= [अ^२ + आ^२ + २अ \times आ - २अ \times आ]^२ - २अ^२ \times आ^२$$

$$= [(अ + आ)^२ - २अ \times आ]^२ - २अ^२ \times आ^२$$

$$= [त^२ - २थ]^२ - २थ^२$$

$$= त^४ - ४त^२थ + ४थ^२ - २थ^२$$

$$= त^४ - ४त^२थ + २थ^२$$

उदाहरण २— यदि अ और आ, $क य^{2} + ख य + ग = 0$ के मूल हों तो ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल $(अ^{2} + आ^{2})$, $(अ^{-2} + आ^{-2})$ हों।

क्योंकि $क य^{2} + ख य + ग = 0$ के मूल अ और आ हैं,

इसलिये $$अ + आ = -\frac{ख}{क}$$

$$अ \times आ = \frac{ग}{क}$$

अपेक्षित समीकार में

$$मूलों\ का\ योग = (अ^{2} + आ^{2}) + \left(\frac{1}{अ^{2}} + \frac{1}{आ^{2}}\right)$$

$$= अ^{2} + आ^{2} + \frac{अ^{2} + आ^{2}}{अ^{2} \times आ^{2}}$$

$$= \frac{(अ^{2} + आ^{2})(1 + अ^{2}आ^{2})}{अ^{2} \times आ^{2}}$$

$$= \frac{[(अ + आ)^{2} - 2अ \times आ][1 + अ^{2}आ^{2}]}{अ^{2} \times आ^{2}}$$

$$\frac{\left(\frac{ख^{2}}{क^{2}} - 2\frac{ग}{क}\right)\left(1 + \frac{ग^{2}}{क^{2}}\right)}{\frac{ग^{2}}{क^{2}}}$$

$$= \frac{(ख^{2} - 2कग)(क^{2} + ग^{2})}{क^{2}ग^{2}}$$

मूलों का गुणनफल

$$=(अ^2+आ^2)\left(\frac{1}{अ^2}+\frac{1}{आ^2}\right)$$

$$=\frac{(अ^2+आ^2)^2}{अ^2 \times आ^2}$$

$$=\frac{\left[(अ+आ)^2-2अ\times आ\right]^2}{अ^2\times आ^2}$$

$$=\frac{\left[\frac{ख^2}{क^2}-2\frac{ग}{क}\right]^2}{\frac{ग^2}{क^2}}$$

$$=\frac{(ख^2-2कग)^2}{क^2ग^2}$$

अतः अपेक्षित समीकार

$$य^2-\frac{(ख^2-2कग)(क^2+ग^2)}{क^2ग^2}य+\frac{(ख^2-2कग)^2}{क^2ग^2}=0$$

अर्थात् $क^2ग^2य^2-(ख^2-2कग)(क^2+ग^2)य+(ख^2-2कग)^2=0$

७६१ यदि समीकार $कय^2+खय+ग=0$ के मूल

(१) महत्ता में समान किन्तु विपरीत चिह्न के, हों,

(२) परस्पर व्युत्क्रम हों,

अथवा (३) एक मूल दूसरे के म बार हो तो आवश्यक प्रतिबंध निकालना।

(१) अब मूलों के महत्ता में समान किन्तु विपरीत चिह्न के होने के लिए उनका योग शून्य के सम होना चाहिए।

अर्थात् $अ + आ = 0$

अतः $-\frac{ख}{क} = 0$

$\therefore \; ख = 0$

इसलिए यदि $ख = 0$ हो तो $कय^2 + खय + ग = 0$ इस समीकार के मूल महत्ता में समान किन्तु विपरीत चिह्न के होंगे।

(२) मूलों के परस्पर व्युत्क्रम होने के लिए उनका गुणनफल एक के सम होना चाहिए।

अतः $अ \times आ = 1$

$$\therefore \frac{ग}{क} = 1$$

अथवा $ग = क$

$\therefore$ यदि $ग = क$ तो द्विघात-समीकार के मूल परस्पर व्युत्क्रम होंगे।

(३) मान लो $आ = म \times अ$

$$\therefore अ + म \times अ = -\frac{ख}{क} \qquad \text{......(प)}$$

$$\text{और } म \times अ^2 = \frac{ग}{क} \qquad \text{......(फ)}$$

(प) और (फ) में से अ का निरसन करने पर अपेक्षित प्रतिबंध प्राप्त होगा।

$$अ\,(१+म) = -\frac{ख}{क}$$

$$अ^{२}\,(१+म)^{२} = \frac{ख^{२}}{क^{२}}$$

$$\frac{(१+म)^{२}ग}{क \times म} = \frac{ख^{२}}{क^{२}} \qquad \left[\because अ^{२} = \frac{ग}{कम}\right.$$

$$मख^{२} = कग\,(१+म)^{२}$$

यह अपेक्षित प्रतिबन्ध है।

प्रश्नावलि ९

(१) इन समीकारों के मूलों का स्वरूप निश्चित करो और उनकी अर्हाएं निकालो—

(च) $य^{२} - ४य - ३ = ०$

(छ) $य^{२} - २य - २ = ०$

(ज) $य^{२} - १४य + ४९ = ०$

(झ) $य^{२} - २य + १० = ०$

(२) ऐसे समीकार बनाओ जिनके निम्न-लिखित मूल हों।

(च) ५,७ (छ) $-३, ४$ (ज) $-३, -५$ (झ) $१ \pm \sqrt{२}$

(ट) $-२ \pm \sqrt{३}$ (ठ) $३ \pm ५श$ (ड) $-३ \pm २श$

(ट) $-क \pm २\sqrt{२ख}$

(३) म की किस अर्हा के लिए समीकार
$य^२ - २(५ + २म)\,य + ३\,(७ + १०म) = ०$ के मूल
(च) समान (छ) परस्पर व्युत्क्रम (ज) महत्ता में समान किन्तु विपरीत चिह्न के होंगे।

(४) यदि द्विघात-समीकार
$(क^२म^२ + ख^२)\,य^२ + २मगक^२य + क^२\,(ग^२ - ख^२) = ०$
के मूल समान हों तो दिखाओ कि

$$ग = \sqrt{क^२म^२ + ख^२}$$

(५) यदि समीकार $य^२ - तथ + थ^२ = ०$ के मूल वास्तविक हों तो दिखाओ कि त, $-२थ$ तथा $+२थ$ के बीच में नहीं रह सकता।

(६) यदि समीकार $य^२ + तय + थ = ०$ का एक मूल दूसरे का वर्ग हो तो सिद्ध करो कि

$$त^३ - थ\,(३त - १) + थ^२ = ०$$

[पटना १९३९

(७) यदि समीकार $कय^२ + खय + ग = ०$ के मूलों की निष्पत्ति 'न' हो तो दिखाओ कि 'न' समीकार $कग\,न^२ + (२कग - ख^२)\,न + कग = ०$ का समाधान करता है।

(८) यदि समीकार $कय^२ + खय + ग = ०$ के मूलों की निष्पत्ति $क_१य^२ + ख_१य + ग_१ = ०$ के मूलों की निष्पत्ति के समान हो तो दिखाओ कि

$$\frac{ख^२ग_१}{क} = \frac{ख_१^२\,ग}{क_१}$$

(९) समीकार $कय^2 + खय + ग = ०$ के मूलों के लिए प्रतिबंध निकालो जब कि

(१) दोनों धन हों।

(२) एक धन तथा दूसरा ऋण हो, पर महत्ता में धनमूल की अपेक्षा बड़ा हो।

(१०) समीकार $य^2 - १०य + १ = ०$ के मूलों का योग, अन्तर तथा गुणनफल निकालो।

(११) यदि समीकार $कय^2 + खय + ग = ०$ का एक मूल दूसरे के तीन बार हो तो दिखाओ कि

$$३ ख^2 = १६ कग$$

(१२) यदि $कय^2 + खय + ग = ०$ के मूल अ तथा आ हों तो निम्न पदसंहतियों की महाएं क, ख, ग के पदों में निकालो।

(च) $अ^4 + आ^4$ (छ) $\frac{अ^3}{आ} + \frac{आ^3}{अ}$

(ज) $अ^4 आ^7 + अ^7 \times आ^4$

(१३) यदि समीकार $य^2 + मय + म^2 + न^2 = ०$ के मूल अ तथा आ हों तो दिखाओ कि

(१) $अ^2 + अ \times आ + आ^2 = -न^2$ और

(२) $अ^4 + अ^2आ^2 + आ^4 = न^2[२म^2 + ३न^2]$

[बम्बई १८९०

(१४) यदि समीकार $य^2 - तय + थ = ०$ के मूल अ और आ हों तो

(च) $\frac{१}{अ^३}+\frac{१}{आ^३}$ (छ) $\frac{अ}{आ^३}-\frac{आ}{अ^३}$ (ज) $\frac{अ^२}{आ^२}-\frac{आ^२}{अ^२}$

की अर्हाएं त और थ के पदों में निकालो।

(१५) यदि समीकार $य^२-य+१=०$ के मूल अ और आ हों तो ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल

$\frac{१+अ}{आ}, \frac{१+आ}{अ}$ हों।

(१६) यदि $य^२+य+१=०$ के मूल अ और आ हों तो ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल $\frac{१+अ}{१-अ}, \frac{१+आ}{१-आ}$ हों

(१७) यदि $कय^२+खक+ग=०$ के मूल अ तथा आ हों तो ऐसे समीकार बनाओ जिन के मूल ये हों

(१) $\frac{१}{अ+आ}, \quad \frac{१}{अ}+\frac{१}{आ}$

(२) $(अ+आ)^२, (अ-आ)^२$

(१८) यदि समीकार $य^२-तय+थ=०$ के मूल अ और आ हों तो ऐसे समीकार बनाओ जिन के मूल ये हों

(१) $\frac{अ}{आ}, \frac{आ}{अ}$ (२) $\frac{२}{अ}, \frac{२}{आ}$ (३) $\frac{१}{अ^३}, \frac{१}{आ^३}$

(२) $अ+\frac{१}{आ}, आ+\frac{१}{अ}$

(१९) यदि समीकार

$$य^२-(१+त^२)य+\frac{१}{२}(१+त^२+त^४)=०$$

$\frac{य^2 - य + १}{य^2 + य + १}$ यह पदसंहति ३ तथा $\frac{१}{३}$ के बीच में रहती है।

मान लो $\frac{य^2 - य + १}{य^2 + य + १} = र$

$\therefore\ य^2 - य + १ = र(य^2 + य + १)$

$य^2(१ - र) - य(१ + र) + १ - र = ०$

क्योंकि य, केवल वास्तविक अर्हाएं ग्रहण करता है, इसलिए इस समीकार के मूल वास्तविक होने चाहिएं।

अतः इसका विवेचक धन होना चाहिए।

अर्थात् $(१ + र)^2 - ४(१ - र)^2$ धन होना चाहिए।

$१ + २र + र^2 - ४(१ - २र + र^2)$ धन होना चाहिए।

$-३र^2 + १०र - ३$ धन होना चाहिए।

$३र^2 - १०र + ३$ ऋण होना चाहिए।

$(३र - १)(र - ३)$ ऋण होना चाहिए।

यदि (१) $३र - १$ धन हो

और $र - ३$ ऋण हो

अथवा (२) $३र - १$ ऋण हो

और $र - ३$ धन हो तो यह संभव होगा।

प्रथम दशा पर विचार करो

$३र - १$ धन होना चाहिए।

$\therefore ३र > १$

अथवा $र > \frac{१}{३}$ अर्थात् $र \nless \frac{१}{३}$

और र − ३ ऋण होना चाहिए

$र < ३$ अर्थात् $र \nless ३$

र की $\frac{१}{३} < र < ३$ ऐसी अर्हाओं से दोनों प्रतिबंधों का एक साथ पालन होता है।

दूसरी दशा—

३र − १ ऋण होना चाहिए।

यदि $३र < १$ तो यह संभव है।

अर्थात् $र < \frac{१}{३}$

और र − ३ धन होना चाहिए।

यदि $र > ३$ तो यह संभव है।

यदि $र < \frac{१}{३}$ और तभी $र > ३$ तो दोनों प्रतिबंधों का पालन हो सकता है किन्तु यह असंगत है।

अतः र की अर्थात् पदसंहति की अर्हाओं के लिए, प्रथम दशा में सीमाएँ प्राप्त होती हैं।

७.८ त्रिपद संहति के चिह्न में परिवर्तन— य की वास्तविक अर्हाओं के लिए पदसंहति $कय^{२} + खय + ग$ का चिह्न सब दशाओं में क के चिह्न के समान होता है केवल

उस दशा को छोड़कर जहां समीकार $कय^2+खय+ग=0$ के मूल वास्तविक तथा असम हों और य की अर्हा उन के बीच रहती हो, इस दशा में पदसंहति का चिन्ह 'क' के चिन्ह के विपरीत होता है।

दशा १—मान लो समीकार $कय^2+खय+ग=0$ के मूल वास्तविक और असम हैं और वे क्रमशः अ तथा आ के सम हैं। मान लो अ, आ से बड़ा है

पदसंहति $कय^2+खय+ग$

$$= क\left[य^2+\frac{ख}{क}य+\frac{ग}{क}\right]$$

$$= क\,[य^2-(अ+आ)\,य+अ\times आ]$$

$$= क\,[य-अ]\,[य-आ]$$

यदि य की अर्हा मूल अ से बड़ी हो तो $य-अ$ तथा $य-आ$ दोनों ही धन होंगे और यदि य मूल आ से छोटा हो तो $अ>आ$ रहने के कारण $य-अ$ और $य-आ$ दोनों ही ऋण होंगे। अतः प्रत्येक दशा में गुणनफल $(य-अ)\,(य-आ)$ धन होगा।

अतः इस दशा में $क\,(य-अ)\,(य-आ)$ का चिह्न क के चिह्न के समान है। अतः जब य की अर्हा मूल अ से बड़ी और मूल आ से छोटी हो अर्थात् जब य मूल अ और मूल आ के बीच नहीं होता, पदसंहति

$कय^2+खय+ग$ का चिह्न क के चिह्न के समान होता है।

अब य की अ और आ के बीच की अर्हाओं पर विचार करो।

अब अ > य > आ

अतः इस दशा में खण्ड य − अ ऋण होगा और खण्ड य − आ धन होगा।

∴ अतः गुणनफल (य − अ) (य − आ) ऋण होगा।

अतः क (य − अ) (य − आ) का चिह्न क के चिह्न के विपरीत होगा और इस दशा में पदसंहति का चिह्न क के चिह्न के विपरीत होगा।

दशा २—

मान लो अ = आ

अब $कय^2 + खय + ग = क\,(य - अ)^2$ [∵ अ = आ

क्योंकि $(य - अ)^2$ य की सब वास्तविक अर्हाओं के लिए धन है इसलिए पदसंहति $कय^2 + खय + ग$ का चिह्न क के चिह्न के समान होगा।

दशा ३—

मान लो समीकार $कय^2 + खय + ग = 0$ के मूल संकर हैं।

इस प्रतिबंध के लिए $ख^2 - ४कग$ ऋण होना चाहिए।

$$अब\ कय^2 + खय + ग = क\left[य^2 + \frac{ख}{क}य - \frac{ग}{क}\right]$$

$$= क\left[\left(य + \frac{ख}{२क}\right)^2 + \frac{ग}{क} - \frac{ख^2}{४क^2}\right]$$

$$= क\left[\left(य + \frac{ख}{२क}\right)^2 + \frac{४कग - ख^2}{४क^2}\right]$$

क्योंकि $ख^2 - ४कग$ ऋण है इसलिए $४कग - ख^2$ धन है।

अतः य की सब वास्तविक अर्हाओं के लिए

$$\left(य + \frac{ख}{२क}\right)^2 + \frac{४कग - ख^2}{४कग}$$ धन है। अतः पदसंहति

$कय^2 + खय + ग$ का चिह्न क के चिह्न के समान है।

उपर्युक्त पर्यालोचन से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि यदि $ख^2 - ४कग$ ऋण अथवा शून्य हो अर्थात मूल संकर अथवा वास्तविक और समान हो तो पदसंहति का चिह्न, य की सब वास्तविक अर्हाओं के लिए क के चिह्न के समान होता है।

७.८१ यह पहले ही बताया जा चुका है कि यदि समीकार $कय^2 + खय + ग = ०$ के मूल अ और आ हों तो पदसंहति $कय^2 + खय + ग$ को $क(य - अ)(य - आ)$ में व्यक्त कर सकते हैं। अब समीकार $कय^2 + खय + ग = ०$ के मूलों के अर्थात् अ और आ के (१) वास्तविक और असम (२) वास्तविक और समान (३) संकर रहने के अनुसार पदसंहति $कय^2 + खय + ग$ के खण्ड क्रमशः (१) वास्तविक और असम (२) वास्तविक और समान (३) संकर रहते हैं।

अतः

(१) यदि $ख^2 > ४कग$ तो $कय^2 + खय + ग$ को दो विभिन्न और वास्तविक खण्डों में बांटा जा सकता है।

(२) यदि $ख^2 = ४कग$ तो $कय^2 + खय + ग$ को दो

वास्तविक और समान खण्डों में बांटा जा सकता है अर्थात् $कय^2 + खय + ग$ पूर्ण वर्ग होगा।

(३) यदि $ख^2 < ४कग$ तो $कय^2 + खय + ग$ को दो रेखीय (linear) और वास्तविक खण्डों में नहीं बांटा जा सकता।

७.९ य और र के द्विघात-श्रित का रेखीय खण्डीकरण होने के लिए प्रतिबन्ध निकालना।

मान लो $कय^2 + २जयर + खर^2 + २छय + २चर + ग$ य और र का द्विघात-श्रित है।

इसका य के द्विघात-श्रित के रूप में विन्यास करने पर $कय^2 + २य\ (जर + छ) + खर^2 + २चर + ग$ प्राप्त होता है। यदि $क \neq ०$ तो आदि से अन्त तक क से गुणा और भाग करो।

$$\therefore \frac{१}{क}\left[क^2य^2 + २कय(जर + छ) + कखर^2 + २कचर + कग\right]$$

अब य के पदों का पूर्ण वर्ग करने से

$$\frac{१}{क}\left[(कय + जर + छ)^2 + कखर^2 + २कचर + कग - (जर + छ)^2\right]$$

प्राप्त होता है।

इस को इस रूप में लिख सकते हैं—

$$\frac{१}{क}\Big[[(कय + जर + छ)^2 - \Big\{(र^2(ज^2 - कख)$$
$$+ २र\ (जछ - कच + (छ^2 - कग)\Big\}\Big]$$

अथवा

$$\frac{१}{क}\left[(कय + जर + छ)^{२} - \left(\sqrt{र^{२}(ज^{२} - कख) + २र(जछ - कच) + (छ^{२} - कग)}\right)^{२}\right]$$

अब दो वर्गों का अन्तर प्राप्त हुआ है जो दो खण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

अतः $\frac{१}{क}\left[(कय + र + छ) \pm \sqrt{र^{२}(ज^{२} - कख) + २र(जछ - कच) + (छ^{२} - कग)}\right]$

ये दो खण्ड प्राप्त होते हैं।

खण्डों के रेखीय होने के लिए मूल चिह्न के नीचे की राशि पूर्ण वर्ग होनी चाहिए। इसके लिए आवश्यक प्रतिबंध यह है कि

$र^{२}(ज^{२} - कख) + २र(जछ - कच) + छ^{२} - कख = ०$
क मूल वास्तविक और समान होने चाहिएं!

अतः $४(जछ - कच)^{२} - ४(छ^{२} - कग)(ज^{२} - कख) = ०$
यह अपेक्षित प्रतिबंध है। इसे सरल करने से
$कखग + २चछज - कच^{२} - खछ^{२} - गज^{२} = ०$ प्राप्त होता है।

मूल चिह्न के नीचे की 'र' की द्विघात-पदसंहति के पूर्ण वर्ग होने के लिये अर्थात् य और र के द्विघात-श्रित के रेखीय खण्डीकरण के लिए यह प्रतिबंध है।

७.९१ $कय^{२} + खय + ग = ०$
और $क_{१}य^{२} + ख_{१}य + ग_{१} = ०$

इन समीकारों में एक साधारण मूल रहने के लिए प्रतिबन्ध निकालना।

मान लो दत्त समीकारों में साधारण मूल अ है।

$\therefore$ कअ^2 + खअ + ग = ०

क$_1$अ^2 + ख$_1$अ + ग$_1$ = ०

तिर्यग् गुणन के नियम से यह फल प्राप्त होगा—

$$\frac{अ^2}{खग_1 - ख_1ग} = \frac{अ}{गक_1 - ग_1क} = \frac{१}{कख_1 - क_1ख}$$

दूसरे के वर्ग को पहिले और तीसरे के गुणनफल के सम करने से 'अ' का निरसन (elimination) करो

$$\frac{अ^2}{(गक_1 - ग_1क)^2} = \frac{अ^2}{(खग_1 - ख_1ग)(कख_1 - क_1ख)}$$

अतः (खग$_1$ − ख$_1$ग) (कख$_1$ − क$_1$ख) = (गक$_1$ − ग$_1$क)^2 यह अपेक्षित प्रतिबंध है।

प्रश्नावलि १०

(१) य की किन वास्तविक अर्हाओं के लिए पदसंहति ६ य^2 − य − ४० धन होगी?

(२) य की किन वास्तविक अर्हाओं के लिए पदसंहति $\frac{(य-३)(४य^2-४य+१)}{(य+२)(य^2-३य+३)}$ धन होगी?

(३) सिद्ध करो कि य की सब वास्तविक अर्हाओं के लिए पदसंहति $\frac{य^२+३}{य+१}$ २ और −६ के बीच में नहीं रह सकती।

(४) यदि य वास्तविक हो तो दिखाओ कि पदसंहति $\frac{य^२+१}{य^२+३य+१}$, −२ तथा $\frac{२}{५}$ के बीचमें नहीं रह सकती।

(५) दिखाओ कि य की सब वास्तविक अर्हाओं के लिए पदसंहति $\frac{य^२-२य+४}{य^२+२य+४}$ ३ और $\frac{१}{३}$ के बीच में रहती है।

(६) यदि य वास्तविक हो तो दिखाओ कि $\frac{२य^२+४य-५}{य^२+य+४}$ पदसंहति $-\frac{७}{२}$ और २ के बीच में रहती है।

(७) यदि य वास्तविक हो तो सिद्ध करो कि $\frac{३य^२+४य+२}{य^२+४य+२}$ पदसंहति −१ तथा +१ के बीच में नहीं रह सकती। [नागपुर १९३९

(८) यदि य वास्तविक हो तो $\frac{५य^२-२य+३}{२य^२-२य+१}$ की सीमाएँ

निकालो। [नागपुर १९३८

(९) यदि य वास्तविक हो तो सिद्ध करो कि

$\frac{य^2 + ३४य - ७१}{य^2 + २य - ७}$ पदसंहति की अर्हाएं ५ और ९ के बीच में नहीं रह सकती। [मद्रास १९३५

(१०) सिद्ध करो कि य की सब वास्तविक अर्हाओं के लिए

$\frac{य^2 - ३य + ४}{य^2 + ३य + ४}$ की पदसंहति $\frac{१}{७}$ और ७ के बीच में रहती है। [कलकत्ता १९५०

(११) यदि त $>$ १ हो तो दिखाओ कि $\frac{य^2 - य}{१ - तय}$ पदसंहति सब वास्तविक अर्हाएं ले सकती है। [मद्रास

(१२) दिखाओ कि य की सब वास्तविक अर्हाओं के लिए

$\frac{(य - १)(य + ३)}{(य - २)(य + ४)}$ पदसंहति $\frac{४}{९}$ और १ के बीच में नहीं रह सकती। [मद्रास १८८४

(१३) यदि य वास्तविक हो और क, ख, ग की अर्हाएं आरोही अथवा अवरोही क्रम में हों तो सिद्ध करो कि

पदसंहति $\frac{(य - क)(य - ग)}{य - ख}$ सब अर्हाएं ले सकती है

(१४) इन पदसंहतियों को रेखीय खण्डों में बांटने के लिए त की अर्हाएं निकालो

(१) $२य^२ + यर - र^२ + तय + ६र - ९$

(२) $१२य^२ + ७यर - तर^२ + १३य + ४५र - ३५$

(३) $१२य^२ - १०यर + २र^२ + ११य - ५र + त$

[मद्रास १९३९

(१५) $३य^२ + ४ खय + २ = ०$ और
$२य^२ + ३य - २ = ०$ इन समीकारों में एक साधारण मूल रहने के लिए ख की अर्हा निश्चित करो।

[कलकत्ता १९३४

(१६) $कय^२ + खय + ग = ०$ और $क_१य^२ + ख_१य + ग_१ = ०$ इन समीकारों में एक साधारण मूल है।

यदि $\frac{क}{क_१}, \frac{ख}{ख_१}, \frac{ग}{ग_१}$ समान्तर श्रेढी में हों तो दिखाओ कि $क_१, ख_१, ग_१$ गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

(१७) यदि $य^२ + तय + थ = ०$ और $य^२ + त_१य + थ_१ = ०$ में एक साधारण मूल हो तो दिखाओ कि वह
$\frac{तथ_१ - त_१थ}{थ - थ_१}$ अथवा $\frac{थ - थ_१}{त - त_१}$ के सम है।

[कलकत्ता १९११

(१८) यदि $य^२ + खय + कग = ०$ और $य^२ + गय + कख = ०$ में एक साधारण मूल हो तो सिद्ध करो कि प्रत्येक का शेष मूल समीकार $य^२ + कय + खग = ०$ का समाधान करता है।

[कलकत्ता १८९२

(१९) यदि $कय^२ + २खय + ग = ०$

और $क_1 य^2 + 2ख_1 य + ग_1 = 0$ इन समीकारों में एक साधारण मूल हो तो सिद्ध करो कि समीकार $(ख^2 - कग) य^2 + (2खख_1 - कग_1 - क_1 ग) य + ख_1^2 - क_1 ग_1 = 0$ के मूल समान होंगे।

(२०) यदि समीकार $कय^2 + 2खय + ग = 0$ के मूल अ और आ हों और $क_1 य^2 + 2ख_1 य + ग_1 = 0$ के मूल (अ + इ) और (आ + इ) हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ख^2 - कग}{क^2} = \frac{ख_1^2 - क_1 ग_1}{क_1^2}$$ [कलकत्ता १९१२

(२१) क की किस अर्हा के लिए $य^2 + 6य + क$ और $य^2 + 12य + 3क$ इन पदसंहतियों में साधारण खण्ड होगा?

(२२) $कय^2 + 2जयर + खर^2$ और $क_1 य^2 + 2ज_1 यर + ख_1 र^2$ इन पदसंहतियों का भाजन क्रमशः $र - मय$ और $मर + य$ रूप के खण्डों से होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध निकालो।

आठवां अध्याय

समीकार

प्रथम भाग (एक अज्ञात)

८.१ इस विभाग में ऐसे समीकारों का पर्यालोचन किया जायगा, जिनका साधन अन्ततः द्विघात समीकार के साधन पर निर्भर रहेगा। दत्त समीकार, द्विघात-समीकार $कर^{२}+खर+ग=०$ के रूपमें प्रह्लास्य होंगे, जिसमें र, य का कोई थित है। इस समीकार से प्राप्त र की दो अर्हाओं से य के दो समीकार प्राप्त होंगे। य के लिए इनका साधन करने पर य की प्राप्त अर्हाओं से दत्त समीकार का समाधान होगा।

उपर्युक्त प्रह्लसन और पुनर्विन्यास से किस प्रकार समीकारों का साधन किया जा सकता है यह इन साधित उदाहरणों से ज्ञात होगा—

उदाहरण १— $य^{सं}+२य^{-सं}-३=०$ का साधन करो।

दत्त समीकार में $य^{सं}=र$ रखो।

$\therefore \quad य^{सं} = \frac{१}{र}$

अतः समीकार का प्रहसन

$$र + \frac{२}{र} - ३ = ० \text{ में होता है।}$$

अथवा $\quad र^{२} - ३र + २ = ०$

अथवा $\quad (र - २)(र - १) = ०$

अतः $\quad र = २$ अथवा १

किन्तु $य^{सं} = र$

$\therefore \quad य^{सं} = २ \quad$ और $य^{सं} = १$

$\therefore \quad य = २^{स} \quad$ और $य = १$

उदाहरण २— $२य^{२} - ३य - ३\sqrt{२य^{२} - ३य + २} + ४ = ०$ का साधन करो।

दत्त समीकार इस रूप में लिखा जा सकता है —

$$२य^{२} - ३य + २ - ३\sqrt{२य^{२} - ३य + २} + २ = ०$$

मान लो $\sqrt{२य^{२} - ३य + २} = र$

इस से समीकार का यह प्रहसन होता है —

$$र^{२} - ३र + २ = ०$$

अर्थात् $\quad (र - २)(र - १) = ०$

$$र = २ \text{ अथवा } र = १$$

अब $\sqrt{२य^{२} - ३य + २} = र$

अतः

(१) $\sqrt{२य^२-३य+२}=२$

$२य^२-३य+२=४$

अथवा $२य^२-३य-२=०$

अथवा $(२य+१)(य-२)=०$

$य=-\frac{१}{२}$ अथवा २

(२) र=१ लेने से

$\sqrt{२य^२-३य+२}=१$

$२य^२-३य+२=१$

अथवा $२य^२-३य+१=०$

अथवा $(२य-१)(य-१)=०$

$\therefore य=\frac{१}{२}$ अथवा १

$\therefore य=\frac{१}{२}, १, -\frac{१}{२}$ अथवा २

उदाहरण ३—

$(य-१)(य-३)(य+४)(य+२)+१६=०$ का साधन करो।

अब $(य-३)(य+४)=य^२+य-१२$

और $(य-१)(य+२)=य^२+य-२$

अतः दत्त समीकार का प्रहसन (उपर्युक्त रीति से खण्डों

को गुणा करने पर)

$(य^2+य-१२)(य^2+य-२)+१६=०$ में होता है।

मान लो $य^2+य=र$

$\therefore (र-१२)(र-२)+१६=०$

$र^2-१४र+४०=०$

अर्थात् $र=१०$ अथवा ४

अतः $य^2+य=१०$ अथवा $य^2+य=४$

अब $य^2+य-१०=०$ से

$$य = \frac{-१\pm\sqrt{४१}}{२}$$ प्राप्त होता है।

और $य^2+य=४$ से

$$य = \frac{-१\pm\sqrt{१७}}{२}$$ प्राप्त होता है।

$$अतः\ य = \frac{-१\pm\sqrt{४१}}{२},\ \frac{-१\pm\sqrt{१७}}{२}$$

८.११ घात-समीकार [exponential equation]—जिन समीकारों में अज्ञात राशि एक अथवा अनेक ज्ञात राशियों के घातों में आती है, उन्हें घात समीकार कहते हैं। ऐसे समीकारों का साधन किस प्रकार किया जा सकता है, यह इन साधित उदाहरणों में दिखाया गया है—

उदाहरण १— $३^{२य+१}=८१\times३^य$ का साधन करो।

अत्र $२^{२य+१}=८१\times३^य$

$$= ३^४ \times ३^५$$
$$= ३^९$$

क्योंकि दोनों पक्षों में आधार एक ही है, इसलिए दोनों पक्षों के घात समान होने चाहिएं।

$$\therefore २य + १ = ९$$
$$\text{अथवा } य = ४$$

उदाहरण २— $२^{२य+३} - ५७ = ६५ (२^य - १)$ का साधन करो।

$$२^{२य+३} - ५७ = ६५(२^य - १)$$
$$२^{२य+३} - ६५ \times २^य - ५७ + ६५ = ०$$
$$२^{२य} \times २^३ - ६५ \times २^य + ८ = ०$$
$$८ \times २^{२य} - ६५ \times २^य + ८ = ०$$

$२^य = र$ रखने से समीकार का प्रहसन $८र^२ - ६५र + ८ = ०$ में होता है।

$$\therefore (र - ८)(८र - १) = ०$$
$$र = ८ \text{ अथवा } \frac{१}{८}$$

किन्तु $र = २^य$

अतः $२^य = ८ \text{ अथवा } \frac{१}{८}$

$$= २^३ \text{ अथवा } \frac{१}{२^३}$$
$$\therefore य = ३ \text{ अथवा } -३$$

८.२. अनुच्छेद ८.१ में

$$कय^2 + खय + ग + त\sqrt{कय^2 + खय + ग} = थ$$

इस रूप के समीकार साधित किए जा चुके हैं जिनमें मूल-चिह्न उपयुक्त आदेश विधा से हटाया जा सकता है। परन्तु समीकार से मूल चिह्न हटाने के पहिले यह देखना आवश्यक है कि कोई समापवर्तक (common factor) हटाया जा सकता है या नहीं। इस उदाहरण पर विचार करो।

उदाहरण १— $\sqrt{य^2 - २य - १५} - \sqrt{य^2 - ७य + १०} = य - ५$ का साधन करो।

अब दत्त समीकार

$$\sqrt{य^2 - २य - १५} - \sqrt{य^2 - ७य + १०} = य - ५$$

$$\sqrt{(य+३)(य-५)} - \sqrt{(य-२)(य-५)} = य - ५$$

इस रूप में लिखा जा सकता है। प्रत्येक पद में से खण्ड $\sqrt{य-५}$ हटाने पर

$$\sqrt{य+३} - \sqrt{य-२} = \sqrt{य-५}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने से

$$य + ३ + य - २ - २\sqrt{(य+३)(य-५)} = य - ५$$

$$य + ६ = २\sqrt{(य+३)(य-२)}$$

पुनः वर्ग करने से

$$य^2 + १२य + ३६ = ४(य+३)(य-२)$$

$$य^2 + १२य + ३६ = ४य^2 + ४य - २४$$

$३य^२ - ८य - ६० = ०$

$\therefore \quad य = ६, -\frac{१०}{३}$

और खण्ड $\sqrt{य - ५}$ को शून्य के सम करने से य=५ मिलता है। अब दत्त समीकार में य=६ रखने से समीकार का समाधान होता है। अतः य=६ समीकार का मूल है।

किन्तु $य = -\frac{१०}{३}$ रखने से समीकार का समाधान नहीं होता। अतः यह समीकार का मूल नहीं है।

∴ समीकार के मूल ५ और ६ हैं।

आलोक (note)— समीकार साधन करते समय कभी मूल चिह्न हटाने के लिए और कभी समीकार का साधन सरल करने के लिए, समीकारों को वर्गित करना पड़ता है। समीकारों को वर्गित करने पर समीकार का घात उच्च हो जाता है। अतः अन्त में अज्ञात की ऐसी अर्हाएं भी प्राप्त होती हैं, जिनसे समीकार का समाधान नहीं होता। अज्ञात की ऐसी अर्हाओं को छोड़ दिया जाता है और समीकार का समाधान करने वाली अर्हाएं केवल ली जाती हैं।

८.३ व्युत्क्रम समीकार (reciprocal equation)—

अब $६य^४ - १७य^३ + २४य^२ - १७य + ६ = ०$

और $४य^५ - १२य^४ + ७य^३ + ७य^२ - १२य + ४ = ०$

इस प्रकार के समीकारों पर विचार करो।

ऐसे समीकारों में य का $\frac{१}{य}$ में परिवर्तन किया जाय तो

सरल करने के पश्चात् समीकार के रूप में परिवर्तन नहीं होता। इस प्रकार के समीकार जिनमें य का $\frac{१}{य}$ में परिवर्तन करने से, समीकार अपरिवर्तित रहते हैं, व्युत्क्रम समीकार कहलाते हैं। ऐसे समीकारों का साधन किस रीति से किया जाता है यह इन साधित उदाहरणों से ज्ञात होगा—

उदाहरण १— $६य^४ - ३५य^३ + ६२य^२ - ३५य + ६ = ०$ का साधन करो।

$६य^४ - ३५य^३ + ६२य^२ - ३५य + ६ = ०$ इस समीकार का $य^२$ से [अर्थात् गुणक रहित-मध्य पद से] आदि से अन्त-तक भाजन करो।

$$६य^२ - ३५य + ६२ - \frac{३५}{य} + \frac{६}{य^२} = ०$$

पदों का पुनर्विन्यास करने पर

$$६\left(य^२ + \frac{१}{य^२}\right) - ३५\left(य + \frac{१}{य}\right) + ६२ = ०$$

अब $य + \frac{१}{य} = र$ रखो।

$$\therefore य^२ + \frac{१}{य^२} = \left(य + \frac{१}{य}\right)^२ - २$$

$$= र^२ - २$$

$य^२ + \frac{१}{य^२}$, $य + \frac{१}{य}$ की अर्हापं र के पदों में रखो।

समीकार का प्रवृत्तन

$६(र^२-२) - ३५र + ६२ = ०$ में होता है।

अथवा $६र^२ - १२ - ३५र + ६२ = ०$

अथवा $६र^२ - ३५र + ५० = ०$

अथवा $(३र - १०)(२र - ५) = ०$

अर्थात $र = \frac{१०}{३}$ अथवा $र = \frac{५}{२}$

किन्तु $र = य + \frac{१}{य}$

$\therefore य + \frac{१}{य} = \frac{१०}{३}$ अथवा $\frac{५}{२}$

(१) $य + \frac{१}{य} = \frac{१०}{३}$

$३य^२ - १०य + ३ = ०$

अथवा $(३य - १)(य - ३) = ०$

$\therefore य = \frac{१}{३}, ३$

(२) $य + \frac{१}{य} = \frac{५}{२}$

$२य^२ - ५य + २ = ०$

अथवा $(२य - १)(य - २) = ०$

$\therefore य = \frac{१}{२}, २$

अतः २, $\frac{१}{२}$, ३, $\frac{१}{३}$, ये दत्त समीकार के मूल हैं।

य का $\frac{१}{य}$ में परिवर्तन करने से समीकार क्यों अपरिवर्तित रहता है यह उत्तर के रूप से स्पष्ट हो जाता है।

आलोक— व्युत्क्रम समीकार का घात युग्म (even) हो तो उपर्युक्त रीति से उसका साधन किया जा सकता है। यदि व्युत्क्रम समीकार का घात अयुग्म हो तो +१ अथवा −१ इन में से एक सदैव समीकार का मूल रहता है। इस मूल का संवादी खण्ड निकाल देने पर समीकार का प्रहसन युग्म घात वाले समीकार में होता है और इसका साधन उपर्युक्त रीति से किया जा सकता है।

८.३१ निम्न-लिखित समीकार व्युत्क्रम समीकार न होते हुए भी उसका साधन गत अनुच्छेद में दी गई रीतिसे ही किया गया है।

उदाहरण— $८य^४ + ४२य^३ + २९य^२ - ४२य + ८ = ०$ का साधन करो।

समीकार का $य^२$ से आदि से अन्त तक भाजन करो और पुनर्विन्यास करो।

$$८\left(य^२ + \frac{१}{य^२}\right) + ४२\left(य - \frac{१}{य}\right) + २९ = ०$$

अब $य - \frac{१}{य} = र$ रखो

$\therefore$ $य^2+\frac{१}{य^2}=\left(य-\frac{१}{य}\right)^2+२$

$=र^2+२$

$\left(य^2+\frac{१}{य^2}\right)$ और $\left(य-\frac{१}{य}\right)$ की अर्हाओं का र के पदों में आदेश करने पर

$८(र^2+२)+४२र+२९=०$

अथवा $८ र^2+१६+४२र+२९=०$

अथवा $८ र^2+४२र+४५=०$

अथवा $(२र+३)(४र+१५)=०$

$\therefore$ $र-=\frac{३}{२}, \quad -\frac{१५}{४}$

किन्तु $य-\frac{१}{य}=र$

$\therefore$ $य-\frac{१}{य}=-\frac{३}{२}$ अथवा $-\frac{१५}{४}$

(१) $य-\frac{१}{य}=-\frac{३}{२}$

$२य^2+३य-२=०$

$(२य-१)(य+२)=०$

$\therefore$ $य=\frac{१}{२}, \quad -२$

(२) $य - \frac{१}{य} = -\frac{१५}{४}$

$४य^२ + १५य - ४ = ०$

$य = -४, \frac{१}{४}$

अतः $य = -२, \frac{१}{२}, -४, \frac{१}{४}$ ये दत्त समीकार के मूल है।

प्रश्नावलि ११

इन समीकारों का साधन करो—

(१) $५\sqrt{\frac{३}{य}} + ७\sqrt{\frac{य}{३}} = २२\frac{२}{३}$

(२) $२\sqrt{\frac{२}{य}} + \sqrt{\frac{य}{२}} = ३$

(३) $\sqrt{य+१} + २\sqrt{\frac{१}{य+१}} = ३$

(४) $२^{२य+८} + १ = ३२ \times २^य$ [नागपूर

(५) $२(य^२ - ३य + १)^२ + ५(य^२ - ३य + १) + ३ = ०$ [कलकत्ता

(६) $(य+२)(३य+१)(य-१)(३य+२) = २२४$ [बम्बई

(७) $(य+४)(य+७)(य+८)(य+११) + २० = ०$ [मद्रास १९१२

(८) $(य+१)(य+२)(य+३)(य+४)=२४$ [मद्रास १९२३

(९) $(य^{२}+५य)(य^{२}+११य+२४)=१६$ [मद्रास १९११

(१०) $\sqrt{य+२}+\sqrt{य-३}=५$ [पंजाब

(११) $य^{२}-य+३\sqrt{२य^{२}-३य+२}=\frac{य}{२}+७$

(१२) $य^{२}+य+१०\sqrt{य^{२}+३य+१६}=२(२०-य)$ [मद्रास

(१३) $३य+२\sqrt{य^{२}-३य+९}=य^{२}+६$ [कलकत्ता

(१४) $य^{२}+\sqrt{य^{२}-५}=११$

(१५) $\sqrt{य^{२}+६य-७}-\sqrt{३य^{२}-५य+२}=य+१$

(१६) $\sqrt{२७य^{२}+२१य+४}+\sqrt{१८य^{२}-य-४}=९य+४$

(१७) $८य^{४}-५४य^{३}+१०१य^{२}-५४य+८=०$

(१८) $१२य^{४}+२८य^{३}-९य^{२}-२८य+१२=०$

(१९) $१५य^{४}+१२८य^{३}+२९०य^{२}+१२८य+१५=०$

(२०) $१२य^{५}-१६य^{४}-३७य^{३}+३७य^{२}+१६य-१२=०$

द्वितीय भाग (दो अज्ञात)

युगपत्-समीकार

(simultaneous equation)

८.४ य और र के दो युगपत समीकारों में एक एकघाती और दूसरा द्विघाती हो तो एकघाती समीकार से एक अज्ञात

की अर्हा दूसरे अज्ञात के पदों में व्यक्त की जा सकती है। इस अर्हा का दूसरे समीकार में आदेश करने पर इस द्विघाती समीकार में केवल एक ही अज्ञात रह जाता है। अब समीकार का साधन करने पर इस अज्ञात की अर्हाएँ प्राप्त होती हैं। इनका एकघाती समीकार में आदेश करने से दूसरे अज्ञात की अर्हाएँ निकाली जा सकती हैं।

उदाहरण— समीकार साधन करो

$\text{५ य} + \text{२ र} = \text{१२}$

$\text{२य}^{2} + \text{३यर} + \text{र}^{2} = \text{१२}$ [कलकत्ता १८८८

प्रथम समीकार से $\text{र} = \dfrac{\text{१२} - \text{५ य}}{\text{२}}$ प्राप्त होता है।

र की इस अर्हा का आदेश द्वितीय समीकार में करो।

$$\text{२य}^{2} + \text{३य} \times \frac{\text{१२} - \text{५य}}{\text{२}} + \left(\frac{\text{१२} - \text{५य}}{\text{२}}\right)^{2} = \text{१५}$$

$$\text{३य}^{2} - \text{४८य} + \text{८४} = \text{०}$$

$$\text{य}^{2} - \text{१६य} + \text{२८} = \text{०}$$

$$\text{य} = \text{२ \quad अथवा १४}$$

यदि य=२ तो प्रथम समीकार से र=१ प्राप्त होता है और यदि य =१४ तो र= −२९ प्राप्त होता है।

$$\therefore \text{य} = \text{२}, \quad \text{र} = \text{१}$$

$$\text{य} = \text{१४}, \quad \text{र} = -\text{२९}$$

८.४१ समानघात समीकार [homogeneous equations]—

जिन समीकारों में प्रत्येक पद की अज्ञात राशियों के घातों का योग एक ही होता है, समानघात समीकार कहलाते हैं। उदाहरणार्थ $क_१य^२ + ख_१र^२ + ग_१यर = ०$

$$क_२य^२ + ख_२र^२ + ग_२यर = ०$$

समानघात समीकार हैं।

$$४य^२ - यर + र^२ = १६$$

$$३य^२ - २यर + र^२ = ८$$

इस प्रकार के समीकार भी समानघात समीकार कहलाते हैं, क्योंकि अचल पदों को छोड़ कर, प्रत्येक में अज्ञात राशियों के घातों का योग एक ही है ऐसे समीकारों का इस रीति से साधन किया जाता है।

उदाहरण— $य^२ + यर + ४र^२ = ६$ ....(१)

$३य^२ + ८र^२ = १४$ ....(२)

इनका साधन करो।

(१) और (२) में $र = मय$ रखो

$य^२(१ + म + ४म^२) = ६$ ....(३)

$य^२(३ + ८म^२) = १४$ ....(४)

(४) से (३) का भाजन करने पर

$$\frac{१ + म + ४य^२}{३ + ८म^२} = \frac{६}{१४} = \frac{३}{७}$$

अर्थात् $४म^२ + ७म - २ = ०$

$$\therefore म = \frac{१}{४}, \text{ अथवा } -२$$

$\therefore$ र $= \frac{१}{४}$य अथवा $-$२य

(२) में र $= \frac{१}{४}$य रखो

$\therefore$ य^२(३ $+ \frac{१}{२}$) $=$ १४ प्राप्त होता है।

$\therefore$ य $= \pm$ २

$\therefore$ य $=$ २ र $= \frac{१}{४}$

य $= -$२ र $= -\frac{१}{२}$

अब (२) में र $= -$२य रखो

$\therefore$ य^२(३ $+$ ८ $\times$ ४) $=$ १४

य$^२ = \frac{२}{५}$

य $= \pm \sqrt{\frac{२}{५}}$

यदि य $= \sqrt{\frac{२}{५}}$ तो र $= -२\sqrt{\frac{२}{५}}$

य $= -\sqrt{\frac{२}{५}}$ तो र $= २\sqrt{\frac{२}{५}}$

अतः उत्तरों के य कुलक (sets) प्राप्त होते हैं

य $=$ २ य $= -$२ य $= \frac{\sqrt{१०}}{५}$ य $= -\frac{\sqrt{१०}}{५}$

$र = \frac{१}{२}$, $र = -\frac{१}{२}$ $र = -२\frac{\sqrt{१०}}{५}$ $र = -२\frac{\sqrt{१०}}{५}$

८.४२ साम्मितीय समीकार (symmetrical equations)— य और र के व्यतिहरण से यदि दत्त समीकार अपरिवर्तित रहें तो वे समीकार, य और र के सम्मितीय समीकार कहलाते हैं।

ये समीकार य और र में सम्मितीय हैं।

$$\left.\begin{array}{r} य+र=४ \\ यर=३ \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{r} यर+य+र=२७ \\ \frac{१}{य}+\frac{१}{र}=\frac{१}{२} \end{array}\right\}$$

अज्ञात राशियों को दो अन्य राशियों के योग और अन्तर के सम मानने से, इन समीकारों का साधन किया जा सकता है।

उदाहरण— $य^३+र^३=९$ .... (१)

$य+र=३$ .... (२)

का साधन करो।

इन समीकारों में $य=प+फ$ और $र=प-फ$ रखो।

(२) से

$$प+फ+प-फ=३$$

$$\text{अथवा } २प=३$$

$$प=\frac{३}{२}$$

(१) में $य=\frac{३}{२}+फ$ तथा $र=\frac{३}{२}-फ$ रखने से

$$\left(\frac{३}{२}+फ\right)^{३}+\left(\frac{३}{२}-फ\right)^{३}=९$$ प्राप्त होता है ।

$$२\left[\left(\frac{३}{२}\right)^{३}+\frac{९}{२}फ^{२}\right]=९$$

$$\frac{२७}{४}+९फ^{२}=९$$

$$३६फ^{२}=९$$

$$फ=\pm\frac{१}{२}$$

यदि $फ=\frac{१}{२}$ और यदि $फ=-\frac{१}{२}$

तो $य=\frac{३}{२}+\frac{१}{२}=२$ $य=\frac{३}{२}-\frac{१}{२}=१$

$र=\frac{३}{२}-\frac{१}{२}=१$ $र=\frac{३}{२}+\frac{१}{२}=२$

$\therefore \left.\begin{matrix}य=२\\ र=१\end{matrix}\right]$ $\left.\begin{matrix}य=१\\ र=२\end{matrix}\right]$

८.४४ यह समीकार सम्मितीय न होते हुए भी, इनका साधन इसी रीति से किया जा सकता है।

उदाहरण— $य^{४}+र^{४}=५६$ ....(१)

$य-र=२$ ....(२)

का साधन करो।

समीकारों में $य = प+फ$ और $र = प-फ$ रखो।

(२) से $प+फ-(प-फ) = २$

$$२फ = २$$

$$फ = १$$

$\therefore\ य = प+१$

$र = प-१$

पहले समीकार में इन अर्हाओं का आदेश करने से

$$(प+१)^४ + (प-१)^४ = ५६$$

$$२[प^४ + ६प^२ + १] = ५६$$

$$प^४ + ६प^२ - २७ = ०$$

$$(प^२ + ९)(प^२ - ३) = ०$$

$$प^२ = -९ \text{ अथवा } ३$$

$\therefore\ प = \pm ३श$ अथवा $\pm\sqrt{३}$

अब $य = प+फ$

$र = प-फ$

और $फ = १$

अतः यदि

$प = \sqrt{३}$ तो $य = \sqrt{३}+१$ $र = \sqrt{३}-१$

$प = -\sqrt{३}$ तो $य = -\sqrt{३}+१$ $र = -\sqrt{३}-१$

$प = ३श$ तो $य = ३श+१$ $र = ३श-१$

$प = -३श$ तो $य = -३श+१$ $र = -३श-१$

८.५ इन साधित उदाहरणों से विभिन्न युक्तियों ा बोध होता है, जो समीकारों के साधन में सहायक ंगी—

उदाहरण १— साधन करो—

$$य^२ + यर + र^२ = २१ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(१)$$

$$य + \sqrt{यर} + र = ७ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

अब $य^२ + र^२ + यर = (य+र)^२ - यर$

$$= (य + र - \sqrt{यर})(य + र + \sqrt{यर})$$

अर्थात्

$$२१ = (य + र - \sqrt{यर})\, ७$$

[(१) और (२) की सहायता से

$$\therefore \quad य + र - \sqrt{यर} = ३ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(३)$$

$$और \; य + र + \sqrt{यर} = ७ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

(३) और (२) का जोड़ करने से

$$य + र = ५ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(४)$$

अतः (२) में (य + र) की अर्हा का आदेश करने से

$$यर = ४ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(५)$$

(४) और (५) का साधन करने पर

$$य = १ \quad र = ४ \quad और \; य = ४ \quad र = १$$

उदाहरण २— इन समीकारों का साधन करो—

$$(य + र)^{\frac{२}{३}} + ६\,(य - र)^{\frac{२}{३}} = ५\,(य^२ - र^२)^{\frac{१}{३}} \quad \ldots\ldots(१)$$

$$१३य + १८र = ७२ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

[मद्रास १९००

समीकार (१) का $(य-र)^{\frac{२}{३}}$ से आदि से अन्त तक भाजन करने पर

$$\left(\frac{य+र}{य-र}\right)^{\frac{२}{३}} + ६ = ५\left(\frac{य+र}{य-र}\right)^{\frac{१}{३}}$$ प्राप्त होता है।

$$\left(\frac{य+र}{य-र}\right)^{\frac{१}{३}} = ल$$ रखो

∴ उक्त समीकार $ल^{२} + ६ = ५ल$ में परिवर्तित होता है।

$$ल^{२} - ५ल + ६ = ०$$

∴ $ल = २$ अथवा ३

∴ $\frac{य+र}{य-र} = ८$ अथवा २७

(१) $\frac{य+र}{य-र} = ८$ लो।

इससे $७य - ९र = ०$ प्राप्त होता है।

अब समीकार (२)

$१३य + १८र = ७२$ की सहायता से

$य = \frac{८}{३}$ और $र = \frac{५६}{२७}$ प्राप्त होते हैं।

∴ $य = २\frac{२}{३}$ और $र = २\frac{२}{२७}$

(२) $\frac{य+र}{य-र}=२७$ लो

इससे $२६य-२८र=०$ प्राप्त होता है।

अब समीकार (२)

$१२य+१८र=७२$ की सहायता से

$य=२\frac{१}{२६}$ और $र=२\frac{१}{४}$ प्राप्त होते हैं।

अतः $य=२\frac{२}{३}$, $र=२\frac{२}{२७}$;

$य=२\frac{१}{१६}$, $र=२\frac{१}{४}$

उदाहरण ३— साधन करो—

$$\frac{य^३+र^३}{(य+र)^२}+\frac{य^३-र^३}{(य-र)^२}=\frac{४३य}{८} \quad ....(१)$$

$$५य-७र=४ \quad ....(२)$$

अब

$$य^३+र^३ = (य+र)^३-३यर(य+र)$$

$$य^३-र^३ = (य-र)^३+३यर(य-र)$$

रखने से समीकार (१)

$$य+र-\frac{३यर}{य+र}+य-र+\frac{३यर}{य-र}=\frac{४३य}{८}$$

में परिवर्तित होता है।

$$३यर\left[\frac{१}{य-र}-\frac{१}{य+र}\right]=\frac{४३य}{८}-२य$$

$$\frac{३यर \times २र}{य^२ - र^२} = \frac{२७य}{८}$$

अतः $य = ०$ अथवा $\frac{६ र^२}{य^२ - र^२} = \frac{२७}{८}$

अर्थात् $१६र^२ = ९(य^२ - र^२)$

$२५र^२ = ९य^२$

$$र = \pm \frac{३}{५} य$$

(क) यदि $य = ०$ तो $र = - \frac{४}{७}$ [समीकार (२) से

(ख) (२) में $र = \frac{३}{५} य$ रखने से

$५ य - ७ \times \frac{३}{५} य = ४$ प्राप्त होता है।

अथवा $य = ५$ अतः $र = ३$

(ग) $र = -\frac{३}{५} य$ रखने से

$५य + ७ \times \frac{३}{५} य = ४$

$२५ य + २१य = २०$

$४६ य = २०$

$य = \frac{१०}{२३} \quad \therefore र = -\frac{३}{२६}$

. $य = ० \quad र = -\frac{४}{७}$

$य = ५ \quad र = ३$

$य = \frac{१०}{२३} \quad र = -\frac{६}{२३}$

प्रश्नावलि १२

निम्न-लिखित समीकारों का साधन करो—

(१) $य + र = ३$
$२य^२ - ५यर + २र^२ = ०$ [कलकत्ता १९२०

(२) $५य + २र = १२$
$२य^२ + ३यर + र^२ = १५$ [कलकत्ता १८८८

(३) $३य + ४र = ५$
$य^२ + र^२ = १$ [कलकत्ता १९२२

(४) $२य + ३र + ४ = ०$
$२य^२ - ३यर + ४र^२ = २४$ [मैसोर १९१७

(५) $य^२ + र^२ + य - र = २२$
$य + र = ६$ [इलाहाबाद १९१०

(६) $\frac{१}{य}+\frac{१}{र}=\frac{१}{२}$

$य+र=९$ [कलकत्ता १९३६

(७) $य+र=\frac{५}{६}$

$\frac{१}{य}-\frac{१}{र}=१$ [कलकत्ता १९३७

(८) $\sqrt{\frac{य}{र}}+\sqrt{\frac{र}{य}}=\frac{५}{२}$

$य+र=१०$ [कलकत्ता १९३८

(९) $यर+य+र=२७$

$\frac{१}{य}+\frac{१}{र}=\frac{१}{२}$ [कलकत्ता १९३९

(१०) $य+र+\sqrt{(य+२)(र+३)}=३४$

$(य+२)^२+(र+३)^२+(य+२)(र+३)=७३१$

[इलाहाबाद १९२८

(११) $\frac{य^२}{र}+\frac{र^२}{य}=१८$

$य+र=१२$ [कलकत्ता १९१९

(१२) $२य^२+३यर+र^२=२०$

$५य^२+४र^२=४१$ [कलकत्ता १८९२

(१३) $य^२+र^२+१७=५यर$

$२य^२ + ३र^२ = ३५$ [मद्रास १८९२

(१४) $४य^२ - यर + र^२ = १६$

$३य^२ - २यर + र^२ = ८$ [पंजाब १९१०

(१५) $४य^२ + ३यर + १८र^२ = २०$

$४य^२ + यर = १०$ [मद्रास १८२७

(१६) $य^४ + य^२ र^२ + र^४ = १३३$

$य^२ - यर + र^२ = ७$ [इलाहाबाद १९०२

(१७) $६य^२ - ५यर - ६र^२ + ३य + २र = ०$

$१०य^२ - ९यर + २र^२ - ९य - ५र - ७ = ०$

[इलाहाबाद १९२६

(१८) $य - र = २$

$य^४ + र^४ = ८२$

(१९) $य + र = ६$

$य^४ + र^४ = ६२६$

(२०) $य - र = २$

$य^५ - र^५ = २४२$

(२१) $य - र = २$

$य^३ - र^३ = २१८$ [कलकत्ता १९१७

(२२) $य + \frac{४}{र} = १$

$र + \frac{४}{य} = २५$ [कलकत्ता १९२०

(२३) $य+यर=३$

$र+यर=४$ [कलकत्ता १९२१

(२४) $य+र+२\sqrt{य+र}=य^२+र^२=१०$ [नागपुर १९२५

(२५) $\frac{य^२}{र^२}+\frac{र}{य}+\frac{य}{र}=\frac{२७}{४}-\frac{र^२}{य^२}$

$य-र=२$ [कलकत्ता १८६५

(२६) $६य+५र=\frac{६}{य}+\frac{५}{र}+२९\frac{१}{३}$

$३य+४र=\frac{३}{य}+\frac{४}{र}+१८\frac{२}{३}$ [मद्रास १८८८

(२७) $\frac{य^२+र^२}{यर}+य^२+र^२=१३\frac{१}{३}$

$\frac{यर}{य^२+र^२}+यर=३\frac{३}{१०}$ [कलकत्ता १९०३

(२८) $य^४+२य^३र+य^२र^२+२र^३य+र^४=४१$

$\frac{य}{र}+\frac{र}{य}=\frac{५}{२}$ [कलकत्ता १८९१

(२९) $य^२+यर+य=१४$

$र^२+यर+र=२८$ [मद्रास १९२२

(३०) $(य+र)^{\frac{२}{३}}+२(य-र)^{\frac{२}{३}}=३(य^२-र^२)^{\frac{१}{३}}$

$३य-२र=१३$

८.६ जिन समीकारों में तीन या अधिक अज्ञात राशियां होती हैं उनका साधन केवल विशेष दशाओं में हो सकता है। निम्न-लिखित अनुच्छेदों में कुछ समीकारों का साधन किया गया है।

८.६१ दो समानघाती रेखीय समीकार और तीसरा कोई भी उच्चतर घातीय—

उदाहरण— साधन करो—

$$य + र - ल = ०$$

$$५य + ३र - ४ल = ०$$

$$४य^२ + ८र^२ + ६ल^२ = ३६$$

प्रथम दो समीकारों से, तिर्यग् गुणन करने पर

$\frac{य}{१} = \frac{र}{१} = \frac{ल}{२} = क$ (मान लो) प्राप्त होते हैं।

$\therefore$ $य = क$, $र = क$, $ल = २क$

क के पदों में य, र, ल की इन अर्हाओं का तृतीय समीकार में आदेश करने पर

$$४क^२ + ८क^२ + २४क^२ = ३६$$

$$३६क^२ = ३६$$

$$क = \pm १$$

यदि क $=१$ तो य $=१$ र $=१$ ल $=२$
और क $=-१$ तो य $= -१$ र $= -१$ ल $=२$

८६२ उदाहरण— साधन करो—

$$य+र+ल=६ \quad \ldots\ldots (१)$$

$$य^{२}+र^{२}+ल^{२}=१४ \quad \ldots\ldots (२)$$

$$रल=६ \quad \ldots\ldots (३)$$

(२) और (३) से निम्न लिखित समीकार प्राप्त होता है

$$य^{२}+र^{२}+ल^{२}+२रल=१४+१२$$

$$य^{२}+(र+ल)^{२}=२६ \quad \ldots\ldots (४)$$

अब $(र+ल)=प$ रखने पर समीकार (१) और (४)

$$य+प=६$$

$य^{२}+प^{२}=२६$ में परिवर्तित होते हैं।

$$य^{२}+प^{२}=(य+प)^{२}-२यप$$

$$२६=३६-२यप$$

$$२यप=१०$$

$$\text{अब } (य-प)^{२}=(य+प)^{२}-४यप$$

$$=३६-२०$$

$$=१६$$

$$\therefore \; य-प=\pm ४$$

(क) $य + प = ६$

तथा $य - प = ४$ लेने से

$य = ५, प = १$ प्राप्त होते हैं।

अब $र + ल = १$

तथा $रल = ६$

$(र - ल)^२ = (र + ल)^२ - ४रल$

$= १ - २४$

$= -२३$

$\therefore\ र - ल = \pm\sqrt{-२३}$

इसको $र + ल = १$ से सम्बद्ध करने पर

$$र = \frac{१ + \sqrt{-२३}}{२}, \quad ल = \frac{१ - \sqrt{-२३}}{२}$$

$$र = \frac{१ - \sqrt{-२३}}{२}, \quad ल = \frac{१ + \sqrt{-२३}}{२}$$

(ख) अब $य - प = -४$ लो।

और $य + प = ६$

$\therefore\ य = १$ और $प = ५$

$\therefore\ र + ल = ५$ और $रल = ६$

$र - ल = \pm १$

$\therefore\ र + ल = ५$ $\quad$ $र + ल = ५$

$र - ल = १$ $\quad$ $र - ल = -१$

$\therefore\ र = ३ \quad ल = २$ $\quad$ $र = २ \quad ल = ३$

$\therefore$ य $=१$ र $=३$ ल $=२$

य $=१$ र $=२$ ल $=३$

८.७ उदाहरण १— साधन करो—

$$य^२+यर+यल=८ \quad \ldots\ldots (१)$$

$$र^२+रल+रय=६४ \quad \ldots\ldots (२)$$

$$ल^२+लय+लर=-३६ \quad \ldots\ldots (३)$$

इन समीकारों को इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$य\ (य+र+ल)=८$$

$$र\ (य+र+ल)=६४$$

$$ल\ (य+र+ल)=-३६$$

सब समीकारों को जोड़ने से

$(य+र+ल)^२=३६$ प्राप्त होता है।

अथवा $य+र+ल=\pm६ \quad \ldots\ldots (४)$

समीकार (४) से क्रमश (१), (२) और (३) का भाजन करने पर

$$य=\frac{४}{३} \quad र=\frac{३२}{३} \quad ल=-६$$

और $य=-\frac{४}{३}$ $र=-\frac{३२}{३}$ $ल=६$ प्राप्त होते हैं।

यह उदाहरण अगले उदाहरण को एक विशेष दशा है।

उदाहरण २— साधन करो—

$$य(टय+ठर+डल) = त \quad \ldots\ldots (१)$$

$$र(टय+ठर+डल) = थ \quad \ldots\ldots (२)$$

$$ल(टय+ठर+डल) = द \quad \ldots\ldots (३)$$

समीकार (१), (२) (३) को क्रमशः ट, ठ, ड से गुणा करने और जोड़ने पर

$$(टय+ठर+डल)^2 = टत+ठथ+डद$$

$$\therefore \; टय+ठर+चल = \pm \sqrt{टत+ठथ+डद} \quad \ldots\ldots (४)$$

अब समीकार (४) से, (१), (२), (३) का भाजन करने पर

$$य = \frac{त}{\sqrt{टत+ठथ+डद}}$$

$$र = \frac{थ}{\sqrt{टत+ठथ+डद}}$$

$$ल = \frac{द}{\sqrt{टत+ठथ+डद}}$$

$$और\; य = -\frac{त}{\sqrt{टत+ठथ+डद}}$$

$$र = -\frac{य}{\sqrt{टत + ठय + डद}}$$

$$ल = -\frac{द}{\sqrt{टत + ठय + डद}}$$

८७१ उदाहरण— साधन करो—

$(र-ल)(ल+य) = २२$ ....(१)

$(ल+य)(य-र) = ३३$ ....(२)

$(य-र)(र-ल) = ६$ ....(३)

सब समीकारों का एक साथ गुणन करने पर

$(य-र)^२ (र-ल)^२ (ल+य)^२ = २२ \times ३३ \times ६$ प्राप्त होता है

अर्थात् $(य-र)(र-ल)(ल+य) = \pm ६६$ ....(४)

अब समीकार (५) से, १), (२) (३) का भाजन करने पर

(क) $र - ल = २$

$ल + य = ११$

$य - र = ३$

(ख) $र - ल = -२$

$ल + य = -११$

$य - र = -३$

(क) के समीकारों का साधन करने से

$य = ८, र = ५, ल = ३$

और (ख) के समीकारों का साधन करने से

$य = -८, \quad र = -५, \quad ल = -३$

अतः $य = ८, \quad र = ५, \quad ल = ३$

और $य = -८, \quad र = -५, \quad ल = -३$

८.७२ उदाहरण— साधन करो—

$य^२ - रल = ५$ .... (१)

$र^२ - लय = ३$ ....(२)

$ल^२ - यर = -१$ ....(३)

समीकार (१), (२), (३) को क्रमशः र, ल और य से गुणा करने पर और तीनों को जोड़कर सरल करने पर

$५र + ३ल - य = ०$ ....(४)

प्राप्त होता है।

समीकार (१), (२), (३) को क्रमशः ल, य, और र से गुणा करने पर और तीनों को जोड़कर सरल करने पर

$५ल + ३य - र = ०$ ....(५)

प्राप्त होता है।

अब समीकार (४) और (५) अर्थात्

$य - ५र - ३ल = ०$

$३य - र + ५ल = ०$ से तिर्यग् गुणन से

$$\frac{य}{-२} = \frac{र}{-१} = \frac{ल}{१} = क \text{ (मान लो)}$$

$\therefore \; य = -२क$

$र = -क$

$ल = क$

य, र, ल की इन अर्हाओं का (१), (२), (३) में से किसी एक में आदेश करने से

$$क^२ = १$$

अर्थात् $क = \pm १$ प्राप्त होता है।

$\therefore$ $क = १$ लेने से $य = -२$ $र = -१$ $ल = १$

और $क = -१$ लेने से $य = २$ $र = १$ $ल = -१$

प्राप्त होते हैं

उदाहरण २— साधन करो—

$$र^२ + रल + ल^२ = ७ \quad \text{......(१)}$$

$$ल^२ + लय + य^२ = १३ \quad \text{......(२)}$$

$$य^२ + यर + र^२ = १९ \quad \text{......(३)}$$

[इलाहाबाद १९२६

(२) में से (१) को घटाने पर

$$य^२ र^२ + ल\,(य - र) = ६$$

$$(य - र)\,(य + र + ल) = ६ \quad \text{......(४)}$$

(३) में से (१) को घटाने पर

$$य^२ - ल^२ + र\,(य - ल) = १२$$

$$(य - ल)\,(य + र + ल) = १२ \quad \text{......(५)}$$

(५) का (४) से भाजन करने पर

$$\frac{य - ल}{य - र} = २$$

$य = २ र - ल$ प्राप्त होता है।

य की इस मह्र्घ का (२) तथा (३) में आदेश करने पर

$४ र^२ + ल^२ - २रल = १३$ ....(६)

$७ र^२ + ल^२ - ५रल = १९$ ....(७)

प्राप्त होते हैं।

$र = फ \times ल$ रखो और (६) का (७) से भाजन करो।

$$\therefore \frac{४फ^२ + १ - २फ}{७फ^२ + १ - ५फ} = \frac{१३}{१९}$$

$$५फ^२ - ९फ - २ = ०$$

$$फ = २, \quad - \frac{१}{५}$$

फ = २ लेने पर

$र = २ ल$

(४) में र की इस मह्र्घ का आदेश करने से

$ल = \pm १$ प्राप्त होता है

$\therefore$ ल = १	र = २	य = ३
ल = −१	र = −२	य = −३

$फ = - \frac{१}{५}$ लेने पर

$\therefore$ र $= -\frac{१}{५}$ल होगा।

(४) में र की इस अर्हा का आदेश करने पर

ल $= \pm \frac{५}{\sqrt{३}}$ प्राप्त होता है।

$\therefore$ र $= \mp \frac{१}{\sqrt{३}}$

और य $= \mp \frac{७}{\sqrt{३}}$

अतः य, र, ल की अर्हाओं के निम्न-लिखित युलक प्राप्त होते हैं।

य$=३$	र$=२$	ल$=१$
य$=-३$	र$=-२$	ल$=-१$
य$=-\frac{७}{\sqrt{३}}$	र$=-\frac{१}{\sqrt{३}}$	ल$=\frac{५}{\sqrt{३}}$
य$=\frac{७}{\sqrt{३}}$	र$=\frac{१}{\sqrt{३}}$	ल$=-\frac{५}{\sqrt{३}}$

८.८ उदाहरण— साधन करो—

य+र+ल$=२$ .... (१)

य^२+र^२+ल$^२=१४$ .... (२)

य^३+र^३+ल$^३=२०$ .... (३)

[इलाहाबाद १९२६

(१) के वर्ग में से (२) को घटाने पर

$यर+रल+लय = -५$ ....(४)

प्राप्त होता है।

अब यह ज्ञात है कि

$य^३+र^३+ल^३-३यरल$

$=(य+र+ल)\ (य^२+र^२+ल^२-यर-रल-लय)$

(१), (२), (३) और (४) का प्रयोग करने से यह फल

$२०-३यरल = २\ (१४+५)$ में परिवर्तित होता है।

$\therefore\ ३यरल = -१८$

$यरल = -६$ ....(५)

अब $य+र+ल = २$ ....(१)

$यर+रल+यल = -५$ ....(४)

और $यरल = -६$ ....(५)

समीकार (४) इस रूप में लिखा जा सकता है।

$रल+य(र+ल) = -५$

इसमें (र+ल) और रल के लिए (१) और (५) में से आदेश करने पर

$-\frac{६}{य}+य\ (२-य) = -५$

$य^३-२य^२-५य+६ = ०$

$\therefore\ य = १,\ ३,\ -२$

य = १ लेने से समीकार (१) और (५) का प्रहसन क्रमशः

र + ल = १

रल = −६ में होना है।

अब (र − ल)² = (र + ल)² − ४रल

= १ + २४

∴ र − ल = ±५

अब र − ल = ५

और र + ल = १ लेने पर

र = ३, ल = −२ प्राप्त होते हैं।

तथा र − ल = −५

और र + ल = १ लेने पर

र = −२, ल = ३ प्राप्त होते हैं।

इसी प्रकार य की शेष अर्हाएं लेने पर, र और ल की संवादी अर्हाएं प्राप्त होंगी।

अतः य, र, ल की अर्हाओं के ये फुलक प्राप्त होते हैं—

य = १	र = −२	ल = ३
य = १	र = ३	ल = −२
य = −२	र = १	ल = ३
य = −२	र = ३	ल = १
य = ३	र = १	ल = −२
य = ३	र = −२	ल = १

प्रश्नावलि १३

इन समीकारों का साधन करो—

(१) य − २र + ल = ०

१८य − २९र + १२ल = ०

२य² + ३र² + ४ल² = ३६ [नागपुर १९२९

(२) ३य − ४र + ६ल = ०

६य + २र − ८ल = ०

य² + ४र² + ८ल² = २२०

(३) य + र + ल = ९

य² + र² + ल² = २९

यर = ६

(४) य + र + ल = ६

य² + र² + ल² = १४

रल = ६ [पटना १९३९

(५) य + र + ल = १$\frac{१}{५}$

यर + यल + रल = $\frac{९}{२६}$

यरल = $\frac{१}{२५}$ [इलाहाबाद १९२५

(६) $य^2 + यर + यल = ६$
$र^2 + रल + रय = १२$
$ल^2 + लय + लर = १८$

(७) $रल - र + ल = ५$
$लय + ल - य = १०$
$यर + य + र = २५$ [नागपुर १९४१

(८) $यर + य + र = २३$
$यल + य + ल = ४१$
$रल + र + ल = २७$ [नागपुर १९२५

(९) $यर + ५ (य + र) = ४७$
$रल + ५ (र + ल) = ६५$
$लय + ५ (ल + य) = ५५$ [नागपुर १९२६

(१०) $यर + २ (य + र) = १६$
$रल + २ (र + ल) = ११$
$लय + २ (ल + य) = ८$ [नागपुर १९३१

(११) $य + र + यर = ११$
$र + ल + रल = १९$
$ल + य + लय = १३$

(१२) $य^2 + र + ल = ३$
$र^2 + ल + य = ३$
$ल^2 + य + र = 3$ [नागपुर १९४३

(१३) $य^2 + य(र + ल) + रल = ५६$
$र^2 + र(ल + य) + लय = ६३$
$ल^2 + ल(य + र) + यर = ७२$

(१४) $र^2+ल^2=क+(र+ल)$

$ल^2+य^2=ख+(ल+य)$

$य^2+र^2=ग+(य+र)$ [नागपुर १९४५

(१५) $य(र+ल-य)=क$

$र(ल+य-र)=ख$

$ल(य+र-ल)=ग$ [नागपुर १९४६

(१६) $य^2-रल=१६$

$र^2-लय=-१४$

$ल^2-यर=१$ [नागपुर १९३९

(१७) $य^2-रल=त$

$र^2-लय=थ$

$ल^2-यर=द$

(१८) $य(र+ल)=५$

$र(य+ल)=८$

$ल(य+र)=९$ [कलकत्ता १९३८

(१९) यदि $\frac{य}{ख+ग-क}=\frac{र}{ग+क-ख}=\frac{ल}{क+ख-ग}$ तो

सिद्ध करो कि

$(क+ख+ग)(रल+लय+यर)$

$=(य+र+ल)(कय+खर+गल)$

[पटना १९३९

(२०) $यल + र = ७ल$

$रल + य = ८ल$

$य + र + \bar{ल} = १२$ [कलकत्ता १९३९

(२१) $य + र + ल = ०$

$य^{२} + र^{२} + ल^{२} = १४$

$य^{३} + र^{३} + ल^{३} = -१८$ [इलाहाबाद १९२४

(२२) $य + र + ल = ६$

$य^{२} + र^{२} + ल^{२} = १४$

$य^{३} + र^{३} + ल^{३} = ३६$ [नागपुर १९३८

(२३) $र^{२} + रल + ल^{२} = ४९$

$ल^{२} + लय + य^{२} = १९$

$य^{२} + यर + र^{२} = ३९$ [इलाहाबाद १९२१

नवां अध्याय

क्रमचय और संचय

(permutation and combination)

९.१ कोई विषय जिसपर गणना की दृष्टि से विचार किया जा सकता है, अंकीय अथवा बीजीय अनुसंधान-क्षेत्र के अन्तर्गत आ सकता है। वस्तुओं का चुनाव (selection) और विन्यास (arrangement) ऐसा ही एक विषय है। जिन कार्यों में, चुनाव अथवा विकल्पों (alternatives) के संयोजन की संभावना होती है, उनपर इस विषय के सिद्धान्त लागू होते हैं।

क, ख, ग, तीन अक्षरों में से दो के चुनाव की समस्या पर विचार करो। विभिन्न संभाव्य चुनाव (क, ख), (ख, ग), और (क, ग) हैं। अतः दो अक्षरों का चुनाव तीन प्रकार से हो सकता है।

किसी एक प्रकार स अक्षरों का चुनाव करने के उपरान्त उनका विभिन्न प्रकारों से विन्यास करने की समस्या पर ध्यान दो। समूह (क, ख) पर विचार करो। ये दो अक्षर (क, ख) अथवा (ख, क) के रूप में विन्यस्त किए जा सकते हैं। इसलिए क और ख इन दो अक्षरों का विन्यास दो प्रकार से हो

सकता है। यह भली भांति समझ लेना चाहिए कि वस्तुओं के विन्यास पर विचार करते समय, जिस क्रम में वे रखी जाती हैं उसका विशेष महत्त्व हो जाता है। किन्तु चुनाव करते समय वस्तुएं जिस क्रम में ली जाती हैं उसपर ध्यान देना आवश्यक नहीं होता। समूह (क, ख) पर विचार करो। इसमें पहले क फिर ख अथवा पहले ख फिर क के चुनाव किए जा सकते हैं। इससे एक ही संयोजन हो सकता है जो (क, ख) अथवा (ख, क) इस प्रकार लिखा जा सकता है।

ये इस विषय की दो विशेष समस्याएं हैं। गणित में चुनाव को संचय (combination) और विन्यस्त चुनाव को क्रमचय (permutation) कहते हैं। दत्त वस्तुओं में से कुछ अथवा सब वस्तुओं को लेने से बननेवाला प्रत्येक समूह अथवा चुनाव संचय कहलाता है और संचय में की वस्तुओं का विन्यास क्रमचय कहलाता है।

९.२ साध्य— यदि एक क्रिया म प्रकारों से की जा सकती हो और (इनमें से किसी भी प्रकार इसको करने पर) दूसरी क्रिया न प्रकारों से की जा सकती हो तो, दोनों क्रियाओं को करने के प्रकारों की संख्या म×न होगी।

मान लो प्रथम क्रिया किसी विशेष प्रकार से की गई है। इसे करने के पश्चात् दूसरी क्रिया न भिन्न भिन्न प्रकारों से की जा सकती है। इसी प्रकार प्रथम क्रिया को करने के प्रकारों में से प्रत्येक प्रकार के लिए दूसरी क्रिया करने के भिन्न भिन्न प्रकार 'न' हैं। किन्तु प्रथम क्रिया करने के प्रकार म हैं। अतः दोनों क्रियाओं को करने के प्रकार म×न हैं।

उदाहरण— ८ प्रतिस्पर्धियों को] २ पुरस्कार कितने प्रकार से दिए जा सकते हैं ?

पहला पुरस्कार ८ विभिन्न प्रकारों से दिया जा सकता है। एक बार इस पुरस्कार के दिए जाने पर ७ प्रतिस्पर्धी रह जाते हैं, जिनमें से किसी को भी दूसरा पुरस्कार दिया जा सकता है। अतः दूसरा पुरस्कार ७ भिन्न भिन्न प्रकारों से दिया जा सकता है। अब पहला पुरस्कार किसी एक प्रकार से दिए जाने पर दूसरा पुरस्कार ७ विभिन्न प्रकारों से दिया जा सकता है। किन्तु पहला पुरस्कार देने के ८ प्रकार हैं अतः दोनों पुरस्कार ८×७ = ५६ प्रकारों से दिए जा सकते हैं।

९.३ 'स' असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक बार 'न' वस्तुएं लेने से प्राप्त, क्रमचयों की संख्या निकालना।

इनकी संख्या निकालना अथवा 'न' रिक्त स्थानों को दत्त स असमरूप (विजातीय) वस्तुओं से भरने के प्रकारों की संख्या निकालना, एक ही बात है।

पहला स्थान 'स' विभिन्न प्रकारों से भरा जा सकता है क्योंकि वह स वस्तुओं में से किसी भी एक से भरा जा सकता है। पहले स्थान के किसी भी एक प्रकार से भरे जाने पर दूसरा स्थान (स−१) प्रकारों से भरा जा सकता है, क्योंकि केवल (स−१) वस्तुएं शेष हैं।

अब पहले स्थान को भरने के प्रत्येक प्रकार के लिए दूसरे स्थान को भरने के (स−१) प्रकार हैं। इसलिए प्रथम दो स्थान कुल स (स−१) प्रकारों से भरे जा सकते हैं।

अब प्रथम दो स्थानों के भरने के प्रत्येक प्रकार के लिए तीसरा स्थान भरने के (स − २) प्रकार हैं। अतः प्रथम तीन स्थान कुल स (स − १) (स − २) प्रकारों से भरे जा सकते हैं

अवलोकन करो कि

(१) प्रत्येक प्रक्रम (stage) में खण्डों की संख्या भरे गए स्थानों की संख्या के सम है।

(२) प्रत्येक खण्ड अपने पूर्वगामी (preceding) खण्ड की अपेक्षा एक कम है।

अतः इन न स्थानों को भरने के कुल प्रकार

= स (स − १) (स − २) ....न खण्डों तक

अथवा = स (स − १) (स − २) ....(स − न − १)

अतः स असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक बार न वस्तुएं लेने पर प्राप्त होनेवाले क्रमचयों की अपेक्षित संख्या स (स − १) (स − २) .... (स − न + १) है।

सभी स वस्तुओं को एक साथ लेने पर क्रमचयों की संख्या स (स − १) ...... स खण्डों तक अथवा स(स − १) ....३ × २ × १ है।

इस गुणनफल का अभिधान सदैव |स अथवा स! प्रतीक से किया जाता है और उसे "हृत स" पढ़ते हैं। भविष्य में स वस्तुओं में से प्रत्येक बार न वस्तुएं लेने पर होनेवाले क्रमचयों की संख्या का अभिधान $^{स}क्र_{न}$ प्रतीक से किया जायगा।

∴ $^{स}क्र_{न}$ = स (स − १) (स − २) ... (स − न + १)

तथा $^{स}क्र_{स}$ = स (स × १) (स − २) .... ३ × २ × १.

= |स.

संख्यात्मक प्रश्नों का साधन करते समय यह ध्यान में रखना उचित है कि प्रतीक ${}^{स}क_{न}$ में 'स' दी गई वस्तुओं का और पादांक न प्रयुक्त सूत्र में खण्डों की संख्या का अभिधान करता है।

उदाहरण १— १, २, ३,......९ इन नौ अंकों में से प्रत्येक बार ४ अंक लेने पर कितनी भिन्न संख्याएं प्राप्त होंगी?

यहां ९ भिन्न वस्तुएं हैं और ९ वस्तुओं में से चार, चार करके प्रत्येक बार ली गई वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या निकालना है।

अतः अपेक्षित फल = ${}^{९}क_{४}$

= ९ × ८ × ७ × ६

= ३०२४

उदाहरण ५— 'परदेशगमन' शब्द के अक्षरों से कितने विभिन्न शब्द बन सकते हैं?

यहां ७ भिन्न अक्षर हैं और इन ७ अक्षरों के विन्यास के विभिन्न प्रकार निकालना है।

अतः प्रकारों की अपेक्षित संख्या ${}^{७}क_{७}$ होगी।

∴ विभिन्न प्रकारों की संख्या

= ७ × ६ × ५ × ४ × ३ × २ × १ = ५०४०

अतः ५०४० विभिन्न शब्द बन सकते हैं।

९.४ 'स' असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक बार 'न' वस्तुएं लेने पर प्राप्त होने वाले संचयों की संख्या निकालना।

यदि संचयों की संख्या का अभिधान ${}^{स}च_{न}$ से किया जाय तो स वस्तुओं में से प्रत्येक बार न वस्तुएं चुनने

$^{स}च_न$ प्रकार होंगे। इनमें से प्रत्येक चुनाव में न वस्तुएं परस्पर $^{न}क्र_न$ प्रकारों से विन्यस्त की जा सकती हैं। अतएव स वस्तुओं में से न वस्तुओं का चुनाव और इन को परस्पर विन्यस्त करने के कुल प्रकार $^{न}क्र_न \times {}^{स}च_न$ हैं। इनकी संख्या 'स' असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक बार 'न' वस्तुएं लेने पर प्राप्त होने वाले क्रमचयों की संख्या के सम है।

अतः $^{न}क्र_न \times {}^{स}च_न = {}^{स}क्र_न$

किन्तु $^{स}क्र_न = स\,(स-१)\,(स-२). \quad (स-न+१)$

$^{न}क्र_न = न\,(न-१)\,(न-२) \quad .. \quad ३\times२\times१$

अत $^{स}च_न = \dfrac{स\,(स-१)(स-२) \quad ..\,(स-न+१)}{१\times२\times३. \; ..\,(न-१)\times न}$

यह देखना चाहिए कि फल के भिन्नीय रूप में होते हुए भी परिभाषानुसार $^{स}च_न$ पूर्णांक है।

९.२१ $^{स}च_न$ की उक्त अहो दूसरे रूप में भी लिखी जा सकती है।

$$\text{जैसे } {}^{स}च_न = \frac{स(स-१)\,(स-२) \quad (स-न+१)}{१\times२\times३..\;...न} \quad (1)$$

अंश और हर को $\underline{|स-न}$ से गुणा करने पर

$$^{स}च_न = \frac{स\,(स-१)\,(स-२)......(स-न+१)\,\underline{|स-न}}{१\times२\times३....\; न\times\underline{|स-न}}$$

$$= \frac{\underline{|स}}{\underline{|न}\;\underline{|स-न}} \quad .... \;... \quad . (२)$$

प्राप्त होता है।

पहिले रूप की अपेक्षा $^{स}च_{न}$ को दूसरे रूपमें व्यक्त करना अधिक प्रचलित है।

$\underline{|0}$ का निर्वचन—

सूत्र (२) में न=स रखने पर

$$^{स}च_{स} = \frac{\underline{|स}}{\underline{|स}\;\underline{|0}} = \frac{१}{\underline{|0}}$$ प्राप्त होता है।

किन्तु $^{स}च_{स}$ सभी एक साथ ली गई स वस्तुओं के संचयों का पर्यायवाची है। ऐसा संचय केवल एक है।

$\therefore\ ^{स}च_{स} = १$

अतः समता का रूपान्तरण

$$१ = \frac{१}{\underline{|0}}$$ में होता है।

उक्त समता के लिए $\underline{|0}$ की अर्हा १ होनी चाहिए। अतः $\underline{|0} = १$

९.४२ आगे लिखे सम्बन्धों को ध्यानपूर्वक समझना चाहिए—

$$\underline{|१६} = १६ \times १५\ \underline{|१४}$$

$$\underline{|१०} = \frac{\underline{|१६}}{१६ \times १५ \times \ldots \times ११}$$

$$\underline{|न} = न(न-१)\ \underline{|न-२}$$

$$= न\ (न-१)\ (न-२) \ldots\ldots (न-त)\ \underline{|न-त-१}$$

९.४३ ये सूत्र महत्त्वपूर्ण हैं।

(१) $^{स}च_{न} = ^{स}च_{स-न}$

(२) $^{स}च_{न} + ^{स}च_{न-१} = ^{स+१}च_{न}$

इन्हें इन रीतियों से सिद्ध किया जायगा।

(१) अब $^{स}च_{स-न} = \dfrac{\lfloor स}{\lfloor स-न \ \lfloor स-(स-न)}$

[अनुच्छेद ९.४१ के अनुसार

$= \dfrac{\lfloor स}{\lfloor स-न \ \lfloor न}$

$= ^{स}च_{न}$

$^{स}च_{न} = ^{स}च_{स-न}$ इस फल को शब्दों में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है— स भिन्न वस्तुओं में से प्रत्येक बार न वस्तुएं लेनेपर संभाव्य संचयो की संख्या, इन्हीं स वस्तुओं में से प्रत्येक बार (स−न) वस्तुएं लेने पर संभाव्य संचयो की संख्या के सम होती है।

ऐसे संचय संपूरक (complementary) संचय कहलाते हैं।

इसको प्रत्यक्ष रीति से भी सिद्ध किया जा सकता है। स वस्तुओं में से न वस्तुएं लेने के प्रत्येक चुनाव में (स−न) वस्तुएं छूट जाती हैं, अर्थात् स वस्तुओं में से न वस्तुओं के प्रत्येक संचय के लिए इन्हीं स वस्तुओं में से (स−न) वस्तुओं का एक संचय बनता है।

∴ स वस्तुओं में से न वस्तुओं के संचयों की संख्या,

'स' में से (स − न) वस्तुओं के संचयों की संख्या के समान है।

(२) ${}^{स}च_{न} + {}^{स}च_{न-१}$ पर विचार करो।

${}^{स}च_{न} + {}^{स}च_{न-१}$

$$= \frac{\lfloor\underline{स}}{\lfloor\underline{न}\ \lfloor\underline{स-न}} + \frac{\lfloor\underline{स}}{\lfloor\underline{न-१}\ \lfloor\underline{स-न+१}}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{स}}{\lfloor\underline{न-१}\ \lfloor\underline{स-न}} \left[\frac{१}{न} + \frac{१}{स-न+१}\right]$$

$$= \frac{\lfloor\underline{स}}{\lfloor\underline{न-१}\ \lfloor\underline{स-न}} \times \frac{(स-न+१+न)}{न\,(स-न+१)}$$

$$= \frac{(स+१)\ \lfloor\underline{स}}{न\ \lfloor\underline{न-१}\ (स-न+१)\ \lfloor\underline{स-न}}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{स+१}}{\lfloor\underline{न}\ \lfloor\underline{स+१-न}}$$

$= {}^{स+१}च_{न}$

उदाहरण १— ${}^{१६}च_{१३}$ की अर्हा निकालो।

यह ज्ञात है कि ${}^{स}च_{न} = {}^{स}च_{स-न}$

$$\therefore \quad {}^{१६}च_{१३} = {}^{१६}च_{१६-१३}$$

$$= {}^{१६}च_{३}$$

$$= \frac{१६ \times १५ \times १४}{१ \times २ \times ३}$$

$$= ५६०$$

उदाहरण २— ८ व्यक्तियों में से किन्हीं तीन को चुनना है। यह कितने प्रकारों से किया जा सकता है और एक विशेष व्यक्ति कितनी वार चुना जायगा?

पहले ८ में से तीन व्यक्तियों को चुनना है। यह ${}^{८}च_{३}$ प्रकारों से किया जा सकता है।

अतः तीन व्यक्तियों को चुनने के समस्त प्रकार $\frac{८ \times ७ \times ६}{१ \times २ \times ३} = ५६$ हैं।

अतः ८ व्यक्तियों में से तीन को चुनने के ५६ प्रकार हैं।

अब उन प्रकारों की संख्या निकालना है जिनमें एक निर्दिष्ट व्यक्ति सदा लिया जायगा। इस व्यक्ति को समूह में रखकर शेष ७ व्यक्तियों में से केवल २ को चुनना चाहिए। यह ${}^{७}च_{२}$ अर्थात् २१ प्रकारों से किया जा सकता है। इससे

उन प्रकारों की संख्या प्राप्त होती है जिनमें एक निर्दिष्ट व्यक्ति का चुनाव सदा होगा।

उदाहरण ३— ८ मनुष्य और ५ स्त्रियों में से ७ व्यक्तियों की समिति कितने प्रकारों, से बनाई जा सकती है जिसमें (१) ३ स्त्रियां हों, (२) कम से कम ३ स्त्रियां हों।

(१) ५ स्त्रियों में से ३ स्त्रियों का $^{५}च_{३}$ प्रकारों से चुनाव किया जा सकता है। इस के उपरान्त समिति के शेष ४ सदस्यों का चुनाव ८ मनुष्यों में से $^{८}च_{४}$ प्रकारों से किया जा सकता है।

अतः ७ सदस्यों की समिति बनाने के प्रकारों की संख्या

$= {}^{५}च_{३} \times {}^{८}च_{४}$

$= \frac{५ \times ४ \times ३}{१ \times २ \times ३} \times \frac{८ \times ७ \times ६ \times ५}{१ \times २ \times ३ \times ४} = ७००$

(२) समिति में कम से कम ३ स्त्रियां रहनी चाहिएं। अतः उसमें ३, ४ अथवा ५ स्त्रियां भी रह सकती हैं। इसलिए ७ सदस्यों की समिति बनाने के लिए क्रमशः ४, ३ अथवा २ मनुष्य लेने चाहिएं।

३ स्त्रियां और ४ मनुष्य चुनने के प्रकार $^{५}च_{३} \times {}^{८}च_{४}$ हैं।

४ स्त्रियां और ३ मनुष्य चुनने के प्रकार $^{५}च_{४} \times {}^{८}च_{३}$ हैं।

५ स्त्रियां और २ मनुष्य चुनने के प्रकार $^{५}च_{५} \times {}^{८}च_{२}$ हैं।

इसलिए प्रकारों की समस्त संख्या

$= {}^{५}च_{३} \times {}^{८}च_{४} + {}^{५}च_{४} \times {}^{८}च_{३} + {}^{५}च_{५} \times {}^{८}च_{२}$

$= ७०० + २८० + २८$

$= १००८$

९.५ ${}^{स}च_{न}$ के महत्तम रहने के लिए न की अर्हा निकालना।

यह सरलता से जाना जा सकता है कि

$${}^{स}च_{न} = \frac{स-न+१}{न} \times {}^{स}च_{न-१}$$

क्योंकि $\frac{स-न+१}{न} \times {}^{स}च_{न-१}$

$$= \frac{स-न+१}{न} \times \frac{स(स-१) \ldots\ldots\ldots (स-न+२)}{१\times२\times३ \ldots\ldots\ldots (न-१)}$$

$$= \frac{स(स-१)(स-२) \ldots\ldots (स-न+१)}{१\times२\times३ \ldots\ldots (न-१)न}$$

$$= {}^{स}च_{न}$$

अतः ${}^{स}च_{न-१}$ का $\frac{स-न+१}{न}$ से गुणन करने पर ${}^{स}च_{न}$ प्राप्त होता है।

$$\frac{{}^{स}च_{न}}{{}^{स}च_{न-१}} = \frac{स-न+१}{न}$$

अब $\frac{स-न+१}{न} \gtreqless १$ तदनुसार ${}^{स}च_{न} \gtreqless {}^{स}च_{न-१}$

अथवा $न \lesseqgtr \frac{स+१}{२}$ तदनुसार ${}^{स}च_{न} \gtreqless {}^{स}च_{न-१}$

दशा १— मान लो स युग्म है और २त के सम है।

$$अतः \frac{स+१}{२}=\frac{२त+१}{२}=त+\frac{१}{२}$$

न की १ से त तक की अर्हाओं के लिए न, $\frac{स+१}{२}$ से छोटा है।

अतः न=१, २,.... त के लिए ${}^{स}च_{न} > {}^{स}च_{न-१}$

अर्थात् ${}^{स}च_{त} > {}^{स}च_{त-१} > {}^{स}च_{त-२} \cdots > {}^{स}च_{३} > {}^{स}च_{२} > {}^{स}च_{१}$

अतः ${}^{स}च_{१}, {}^{स}च_{२}, \ldots {}^{स}च_{त}$ इनमें ${}^{स}च_{त}$ महत्तम है।

न की अगली बड़ी अर्हा त+१ है।

अब न=त+१, त+२,...... के लिए $न > \frac{स+१}{२}$

अतः न=त+१, त+२,........२त के लिए

${}^{स}च_{न} < {}^{स}च_{न-१}$

अर्थात् ${}^{स}च_{त} > {}^{स}च_{त+१} > {}^{स}च_{त+२} \cdots > {}^{स}च_{२त}$

अतः ${}^{स}च_{त}, {}^{स}च_{त+१}, {}^{स}च_{त+२}, \ldots$ इनमें ${}^{स}च_{त}$ महत्तम है।

इसलिए ${}^{स}च_{१}, {}^{स}च_{२}, {}^{स}च_{३}, \ldots {}^{स}च_{२त}$ इन में ${}^{स}च_{त}$

महत्तम है। अर्थात् स यदि युग्म हो तो $^{स}च_{त}$ महत्तम होगा।

दशा २— मान लो स अयुग्म है और २थ+१ के सम है।

$$\frac{स+१}{२} = \frac{२थ+१+१}{२} = थ+१$$

न की १ से थ तक की अर्हाओं के लिए न, $\frac{स+१}{२}$ से छोटा है।

∴ न=१, २, ३, ...थ के लिए $^{स}च_{न} > {}^{स}च_{न-१}$

अर्थात्

$^{स}च_{थ} > {}^{स}च_{थ-१} > {}^{स}च_{थ-२} \ldots\ldots {}^{स}च_{३} > {}^{स}च_{२} > {}^{स}च_{१}$

अतः $^{स}च_{१}, {}^{स}च_{२}, {}^{स}च_{३} \ldots\ldots {}^{स}च_{थ}$ इन में $^{स}च_{थ}$ महत्तम है।

यदि न=थ+१ तो $^{स}च_{थ} = {}^{स}च_{थ+१}$

न की न=थ+२, थ+३, .. (२थ+१) इन अर्हाओं के लिए न, $\frac{स+१}{२}$ से बड़ा है।

∴ $^{स}च_{न} < {}^{स}च_{न-१}$

अर्थात्

$^{स}च_{थ+१} > {}^{स}च_{थ+२} > {}^{स}च_{थ+३} \ldots\ldots > {}^{स}च_{२थ+१}$

अतः $^{स}च_{थ+1}$, $^{स}च_{थ+2}$, ...$^{स}च_{2थ+1}$ इन में $^{स}च_{थ+1}$ महत्तम है।

इसलिए इस दशा में $^{स}च_1$, $^{स}च_2$, ... $^{स}च_{2थ+1}$ इन में $^{स}च_{थ}$ और $^{स}च_{थ+1}$ महत्तम हैं और वे समान हैं।

अतः यदि स अयुग्म हो तो $^{स}च_{\frac{स-1}{2}}$ और $^{स}च_{\frac{स+1}{2}}$ महत्तम होते हैं और वे समान होते हैं।

९.६ (ट+ठ) भिन्न वस्तुओं को क्रमशः ट और ठ वस्तुएं अन्तर्धारण करने वाले दो समूहों में विभक्त करने के प्रकारों की संख्या निकालना।

स्पष्ट है कि यह, (ट+ठ) वस्तुओं में से प्रत्येक बार ट वस्तुएं लेने पर प्राप्त होने वाले संचयों की संख्या निकालने के समान है। क्यों कि प्रत्येक बार ट वस्तुओं के एक समूह का चुनाव करने में ठ वस्तुओं का समूह छूट जाता है।

$$\text{अपेक्षित संख्या} = \frac{\underline{|ट+ठ}}{\underline{|ट}\,\underline{|(ट+ठ)-ट}} = \frac{\underline{|ट+ठ}}{\underline{|ट}\,\underline{|ठ}}$$

...ोक—यदि ट=ठ हो तो समूह समान होंगे और इस दशा में अन्त विभाग के विभिन्न प्रकारों की संख्या

$\frac{\lfloor \text{२ट}}{\lfloor \text{२}\ \lfloor \text{ट}\ \lfloor \text{ट}}$ होगी, क्योंकि किसी भी एक प्रकार में नया बांट प्राप्त किए बिना ही, दोनो समूहोंका व्यतिहरण (interchange) सम्भव है।

९.६१ (ट+ठ+ड) भिन्न वस्तुओं को क्रमशः ट, ठ और ड वस्तुओं को अन्तर्धारण करनेवाले तीन समूहों में विभक्त करने के प्रकारों की संख्या निकालना।

पहले (ट+ठ+ड) वस्तुओं को ट और (ठ+ड) वस्तुओं को धारण करने वाले समूहो में विभक्त करो। यह करने के प्रकारों की संख्या

$$= \frac{\lfloor \text{ट+ठ+ड}}{\lfloor \text{ट}\ \lfloor \text{ठ+ड}}$$

अब, (ठ+ड) वस्तुओं के प्रत्येक समूह के 'ठ' और 'ड' वस्तुओं को धारण करने वाले ऐसे दो समूहों में विभक्त करने के संभाव्य प्रकार $\frac{\lfloor \text{ट+ठ}}{\lfloor \text{ठ}\ \lfloor \text{ड}}$ हैं परन्तु (ठ+ड) वस्तुओं के समूहों के संभाव्य प्रकार $\frac{\lfloor \text{ट+ठ+ड}}{\lfloor \text{ट}\ \lfloor \text{ठ+ड}}$ हैं। इसलिए

(ट+ठ+ड) वस्तुओं के ट, ठ और ड वस्तुएं धारण करने वाले ऐसे तीन समूहों में विभक्त करने के कुल प्रकार

$$\frac{\underline{|ट+ठ+ड}}{\underline{|ट}\ \underline{|ठ+ड}} \times \frac{\underline{|ठ+ड}}{\underline{|ठ}\ \underline{|ड}} = \frac{\underline{|ट+ठ+ड}}{\underline{|ट}\ \underline{|ठ}\ \underline{|ड}}$$

यहां यह अच्छीतरह समझ लेना चाहिए कि समूह किस क्रम में बनते हैं इसपर ध्यान देने की आवश्यकता नहीं है।

आलोक— यदि ड=ठ=ट तो $\frac{\underline{|३ट}}{\underline{|ट}\ \underline{|ट}\ \underline{|ट}\ \underline{|३}}$ प्रकार

प्राप्त होंगे, क्योंकि समूहों में वस्तुओं की संख्या समान होने के कारण उनके व्यतिहरण से नया अन्तर्विभाग प्राप्त नहीं होता और अन्तर्विभाग क प्रत्येक प्रकार के लिए $\underline{|३}$ प्रकार हैं इसलिए उक्त फल प्राप्त होता है।

उदाहरण १— २४ छात्रों की कक्षा को ३ समान समूहों में विभक्त करने के प्रकारों की संख्या निकालो।

८ छात्रों के तीन समूह बनाने हैं। अतः प्रकारों की

$$\text{संख्या} = \frac{\underline{|२४}}{\underline{|८}\ \underline{|८}\ \underline{|८}\ \underline{|३}}$$

$$= \frac{|\underline{२४}}{(|\underline{८})^{३}\ |\underline{३}}$$

९.७ अभीतक केवल विजातीय (unlike) वस्तुओं पर ही विचार किया गया है। किन्तु ऐसी समस्याएं आ सकती हैं जिनमें कुछ वस्तुएं सजातीय हों। इसलिए सजातीय और विजातीय वस्तुओं की परिभाषा जानना भी आवश्यक है।

जिन वस्तुओं में कोई समान लक्षण विद्यमान हो, तो वे 'सजातीय' और भिन्न-भिन्न लक्षणों वाली वस्तुएँ 'विजातीय' कहलाती हैं।

९.७१ सभी एक साथ ली गई स वस्तुओं के परस्पर विन्यास के प्रकारों की संख्या निकालना, जब त वस्तुएं सुतथ्यतः (exactly) एक प्रकार की हैं अर्थात् सजातीय हैं, थ वस्तुएं सुतथ्यतः दूसरे प्रकार की हैं अर्थात् सजातीय हैं और शेष सब एकैकशः विजातीय हैं।

मान लो स अक्षर है उनमें से त अक्षर क हैं, थ अक्षर ख हैं और शेष एकैकशः विजातीय हैं।

मान लो अपेक्षित क्रमचयों की संख्या य है।

यदि त क-अक्षरों का शेष अक्षरों से भिन्न त एकैकशः विजातीय अक्षरों से प्रतिस्थापन किया जाय तो य क्रमचयों में से किसी भी एक क्रमचय से, शेष अक्षरों के स्थानों में परिवर्तन किए बिना ही |त नये क्रमचय बन सकते हैं।

इसलिए यदि य क्रमचयों में से प्रत्येक में यह परिवर्तन किया जाय तो य |त क्रमचय प्राप्त होंगे।

इसी प्रकार थ ख-अक्षरों का प्रतिस्थापन एकैकशः थ विजातीय अक्षरों से करने पर क्रमचयों की संख्या य |त |थ हो जायगी

सजातीय 'त' और सजातीय 'थ' के स्थानों में सब विजातीय अक्षर रखने से सभी अक्षर विजातीय हो जाते हैं।

किन्तु स विजातीय अक्षरों के क्रमचयों की संख्या |स है।

अतः य |त |थ = |स

$$\text{य} = \frac{|\text{स}}{|\text{त}\ |\text{थ}}$$

त और थ वस्तुओं की सजातीयता का ध्यान रखते हुए क्रमचयों की अपेक्षित संख्या उक्त फल है।

उदाहरण— सब मिलाकर १० अक्षर दिए गए हैं, जिनमें दो क, तीन ख और शेष भिन्न हैं। इन १० अक्षरों के भिन्न क्रमचयों की संख्या निकालो।

१० अक्षरों में से २ एक प्रकार के सजातीय, ३ दूसरे प्रकार के सजातीय और शेष भिन्न हैं।

अतः प्रकारों की अपेक्षित संख्या

$$= \frac{\underline{|१०}}{\underline{|३}\ \underline{|२}}$$

= ३०२४००

९.८ 'स' असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक बार 'न' वस्तुएं लेनेपर प्राप्त क्रमचयों की संख्या निकालना जब कि प्रत्येक विन्यास में प्रत्येक वस्तु एक बार, दो बार,......'न' बार तक पुनरावृत्त हो सकती है।

यहां यदि सब वस्तुओं में से प्रत्येक का, किसी भी विन्यास में जितनी बार चाहें प्रयोग किया जा सके तो दत्त स वस्तुओं से न स्थानों को भरने के प्रकारों की संख्या निकालने पर विचार करना है।

प्रथम स्थान स प्रकारों से भरा जा सकता है और प्रथम स्थान के किसी भी एक प्रकार भरे जाने पर द्वितीय स्थान भी स प्रकारों से भरा जा सकता है क्योंकि उसी वस्तु का फिर से प्रयोग हो सकता है।

इसलिए प्रथम दो स्थानो को भरने के प्रकारों की संख्या $स^{२}$ है।

प्रथम दो स्थानों को किसी भी एक प्रकार से भरने पर तीसरा स्थान भी स प्रकारों से भरा जा सकता है। अतः प्रथम तीन स्थान $स^{३}$ प्रकारों से भरे जा सकते हैं। इस प्रकार से स्थानों को भरने में यह देखा जाता है कि स का घात सदैव भरे गए स्थानों के सम है। इसलिए न स्थानों को भरने के प्रकारों की संख्या $स^{न}$ के सम है।

उदाहरण—५ लड़कों को ३ पुरस्कार कितने प्रकारों से दिए जा सकते हैं, जब प्रत्येक लड़का सभी पुरस्कारों को पाने के योग्य है ?

कोई भी पुरस्कार ५ प्रकारों से दिया जा सकता है। प्रथम पुरस्कार दिए जाने के पश्चात् शेष में से कोई भी पुरस्कार ५ प्रकारों से पुनः दिया जा सकता है। क्योंकि यह, प्रथम पुरस्कार पाने वाले लड़के को भी दिया जा सकता है। अतः दोनों पुरस्कार $५^२$ प्रकारों से दिए जा सकते हैं।

दोनों पुरस्कार दिए जाने पर शेष पुरस्कार पुनः ५ प्रकारों से दिया जा सकता है क्योंकि प्रत्येक लड़का पुरस्कार पाने योग्य है।

अतः तीनों पुरस्कार $५^३$ प्रकारों से दिए जा सकते हैं इसलिए जब प्रत्येक लड़का सभी पुरस्कार पाने के योग्य है तब ५ लड़कों को ३ पुरस्कार देने के कुल प्रकार १२५ हैं।

९.८१ स वस्तुओं में से कुछ या सब वस्तुओं के सभाव्य चुनावों के प्रकारों की कुल संख्या निकालना।

प्रत्येक वस्तु के साथ दो प्रकार से व्यवहार किया जा सकता है। या तो उसे लिया जा सकता है, या छोड़ दिया जा सकता है।

क्योंकि किसी एक वस्तु के साथ व्यवहार के प्रत्येक प्रकार को, अन्य वस्तुओं में से किसी एक के साथ व्यवहार के प्रत्येक प्रकार से सम्बद्ध कर सकते हैं इसलिए स वस्तुओं के साथ व्यवहार करने के प्रकारों की संख्या (२×२×२×... स खण्डों तक) है। किन्तु इस में उस प्रकार का भी समावेश

किया गया है जिसमें सब वस्तुएं छोड़ दी गई हैं। इसे छोड़ अन्य प्रकारों की कुल संख्या $2^{उ}-1$ है।

९८२ त+थ+द+...... वस्तुओं में कुछ अथवा सब वस्तुओं के संभाव्य चुनावों के प्रकारों की संख्या निकालना, जिसमें त एक प्रकार की सजातीय, थ दूसरे प्रकार की सजातीय, द तीसरे प्रकार की सजातीय...... इत्यादि वस्तुएं हैं।

त वस्तुओं के साथ (त+१) प्रकारों से व्यवहार किया जा सकता है क्योंकि उनमें से ०, १, २,...... त वस्तुएं ली जा सकती हैं। इसी प्रकार थ वस्तुओं के साथ (थ+१) प्रकारों से व्यवहार किया जा सकता है और इसी प्रकार आगे भी। अतः सब वस्तुओं के साथ व्यवहार करने के प्रकार (त+१) (थ+१) (द+१)............हैं।

किन्तु इनमें उस प्रकार का भी समावेश है जिसमें इन वस्तुओं में से कोई भी वस्तु नहीं ली गई। इस प्रकार को छोड़कर अन्य प्रकारों की समस्त संख्या

=[(त+१) (थ+१) (द+१) ....]−१

उदाहरण १— एक दूरलिख साधित्र (telegraph apparatus) की ६ भुजाएं हैं जिनमें से प्रत्येक, विश्राम स्थिति समेत ५ स्पष्ट संज्ञप्तियां (signals) भेजने में समर्थ हैं। दिखाओ कि संज्ञप्तियों की समस्त संख्या १५६२४ है।

पहली भुजा विश्राम स्थिति समेत ५ स्पष्ट संज्ञप्तियां भेज सकती है। यदि पहली भुजा ५ स्थितियों में से

किसी एक स्थिति में हो तो दूसरी भुजा ५ स्पष्ट संज्ञप्तियां भेज सकती है। अतः दोनों भुजाएं मिलाकर $५^२$ स्पष्ट संज्ञप्तियां भेजेंगी। इनमें दोनों भुजाओं की विश्राम स्थिति का भी समावेश है। जब ३ भुजाओं पर विचार किया जाता है तो संज्ञप्तियों की संख्या $५^३$ होती है ...... और इसी प्रकार आगे भी।

अतः छहों भुजाओं के क्रियाशील होने पर दूरालेख साधित्र $५^६$ स्पष्ट संज्ञप्तियां भेजने में समर्थ होगा। किन्तु इनमें सब भुजाओं की विश्राम अवस्था के प्रकार का समावेश होता है। अतः स्पष्ट संज्ञप्तियों की समस्त संख्या $५^६ - १$ अर्थात् १५६२४ है।

उदाहरण २— एक रेल गाड़ी में १६ डिब्बे हैं जिनमें ३ प्रथम वर्ग के, ४ द्वितीय और ५ तृतीय वर्ग के हैं और शेष एकैकशः भिन्न हैं। यदि प्रत्येक वर्ग के डिब्बे सजातीय मान लिए जायं तो कितने प्रकारों से गाड़ी के डिब्बों का विन्यास किया जा सकता है? प्रथम वर्ग के डिब्बों को एक साथ रखने में विन्यास के कितने प्रकार हो सकते हैं?

१६ डिब्बों में ३ एक प्रकार के सजातीय, ४ दूसरे प्रकार के सजातीय, ५ तीसरे प्रकार के सजातीय, और शेष एकैकशः भिन्न हैं।

$$\text{अतः क्रमचयों की संख्या} = \frac{\underline{|१६}}{\underline{|३}\ \underline{|४}\ \underline{|५}}$$

दूसरी दशा में प्रथम वर्ग के डिब्बे एक साथ हैं उन्हें (प्रथम वर्ग के डिब्बों को) एक मान लिया जाय। अतः इस विन्यास में डिब्बों की समस्त संख्या १४ है जिनमें ४ एक प्रकार के सजातीय, ५ दूसरे प्रकार के सजातीय और शेष एकैकशः भिन्न हैं।

$$\text{अतः क्रमचयों की अपेक्षित संख्या} = \frac{\lfloor 14}{\lfloor 4 \; \lfloor 5}$$

उदाहरण ३— सब मिलाकर ११ अक्षर हैं, जिनमें दो क हैं, दो ग हैं, तीन ख हैं, और अन्य घ, च, छ, ज हैं। इन अक्षरों में से चार अक्षरों के (अ) चुनावों की और (आ) विन्यास के प्रकारों की संख्या निकालो।

क, क, ख, ख, ख; ग, ग; घ, च, छ, ज ये सात भिन्न प्रकारके सब मिलाकर ११ अक्षर हैं चार-चार के समूह बनाने के लिए इनका इस प्रकार वर्गीकरण होना चाहिए।

(१) तीन सजातीय और एक भिन्न

(२) दो सजातीय और दूसरे दो सजातीय

(३) दो सजातीय और दो भिन्न

(४) चारों भिन्न

(१)यह चुनाव ६ प्रकारों से किया जा सकता है क्यों कि तीन ख अक्षरों के अकेले समूह के साथ क, ग, घ, च, छ, ज इन अक्षरों में से प्रत्येक को लिया जा सकता है।

(२) यह प्रवरण $^{३}च_{२}$ प्रकारों से किया जा सकता है क्योंकि क, क; ख, ख, ग, ग इन तीन युग्मों में से दो युग्मों का चुनाव करना है। इससे ३ प्रकार प्राप्त होते हैं।

(३) यह चुनाव $३ \times {}^{६}च_{२}$ प्रकारों से किया जा सकता है, क्योंकि तीन युग्मों में से एक का और शेष ६ अक्षरों में से २ का चुनाव करना है।

(४) इसे $^{७}च_{४}$ प्रकारों से किया जा सकता है क्योंकि सात भिन्न अक्षरों में से चार भिन्न अक्षरों का चुनाव करना है।

अतः चुनावों की समस्त संख्या

$$= ६ + {}^{३}च_{२} + (३ \times {}^{६}च_{२}) + {}^{७}च_{४}$$

$$= ६ + ३ + \frac{३ \times ६ \times ५}{१ \times २} + \frac{७ \times ६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३ \times ४}$$

$$= ६ + ३ + ४५ + ३५$$

$$= ८९$$

चार अक्षरों के भिन्न भिन्न विन्यासों को निकालने के लिए पूर्वगामी समूहों में से प्रत्येक का सब संभाव्य प्रकारों से क्रमचय करना होगा।

(१) से $६ \times \frac{\underline{|४}}{\underline{|३}}$ अथवा २४ विन्यास

(२) से $३ \times \frac{\underline{|४}}{\underline{|२}\ \underline{|२}}$ अथवा १८ विन्यास

(३) से ४५ × |४ / |२ अथवा ५४० विन्यास

(४) से ३५ × |४ अथवा ८४० विन्यास प्राप्त होते हैं।

अतः विन्यासों की समस्त संख्या

=२४+१८+५४०+८४०

=१४२२

प्रश्नावलि १४

(१) बम्बई और मद्रास के बीच ८ जलयान चलते हैं। एक मनुष्य कितने प्रकारों से, बम्बई से मद्रास जाकर भिन्न जलयान से लौट सकता है?

(२) १० उपन्यासों, ६ मासिक पत्रिकाओं और ८ दैनिक पत्रिकाओं से किसी एक उपन्यास, एक मासिक पत्रिका, और एक दैनिक पत्रिका का चुनाव कितने प्रकारों से किया जा सकता है?

(३) किसी अलमारी के एक खाने में केवल ८ पुस्तकें रखी जा सकती हैं। १२ पुस्तकें उसमें कितने प्रकारों से रखी जा सकेंगी?

(४) ८ भिन्न पुस्तकों का अलमारी के खाने में कितने प्रकारों से विन्यास किया जा सकता है, जिससे

दो विशेष पुस्तकें एक दूसरे के साथ रहें ?

(५) १० लड़कों का एक पंक्ति में कितने प्रकारों से विन्यास किया जा सकता है ? इनमें से कितने प्रकारों में आदि और अन्त के स्थानों में दो विशेष लड़के रहेंगे ?

(६) ११ परीक्षा-पत्रों को कितने भिन्न क्रमों में रखा जा सकता है जिस से तीन गणित-पत्रों में से कोई भी दो अनुगामी न हों ?

(७) हत संकेतना में व्यक्त करो—

(अ) $१२ \times ११ \times १०$ (आ) $८ \times ९ \times १० \times ११$

(इ) स (स − १) (स − २) (स − ३)

(ई) स (स + १) (स + २)

(उ) स (स + १) (स + २) (स + ३)... (स + न)

(८) सरल करो (अ) $\dfrac{|\underline{\text{स}}}{\text{म} - २}$ (आ) $|\underline{\text{स}} - |\underline{\text{स} - २}$

(९) सिद्ध करो कि

(अ) $|\underline{२\text{स}} \div |\underline{\text{स}} = २^{\text{स}}[१ \times ३ \times ५ \times ७ ...(२\text{स} - १)]$

(आ) $२ \times ६ \times १० \times १४ ...(४\text{स} - ६)(४\text{स} - २)$

$= (\text{स} + १)(\text{स} + २)(\text{स} + ३)...(२\text{स} - १)(२\text{स})$

(१०) ७ सांक्षेत्रिक वर्णों (prismatic colours) के भिन्न विन्यासों की संख्या निकालो जिससे नीला और हरा वर्ण एक साथ न हों।

(११) ३ व्यंजन और २ स्वर इन ५ अक्षरों से ऐसे कितने भिन्न शब्द बन सकते हैं, जिससे किसी भी शब्द में तीन व्यंजन एक साथ न हों ?

(१२) $^{४०}च_{३७}$, $^{२८}च_{२४}$, $^{११}च_{१०}$ की अर्हाएं निकालो।

(१३) $^{८}क_{३}$, $^{१४}क_{४}$, $^{१०}क_{५}$ की अर्हाएं निकालो।

(१४) यदि $^{१स}च_{न} = {}^{१स}च_{न+२}$, तो न की अर्हा निकालो।

(१५) यदि $म = {}^{स}च_{२}$, तो दिखाओ कि $^{म}च_{२} = ३\ {}^{स+१}च_{४}$

[कलकत्ता १९१२

(१६) दो आदमी एक रेल के डिब्बे में जाते हैं जिसमें ६ रिक्त स्थान हैं। कितने भिन्न प्रकारों से ये उसमें बैठ सकते हैं ?

(१७) ५ स्त्रियां और ३ पुरुष टेनिस खेलना चाहते हैं। कितने प्रकारों से वे विभक्त हो सकते हैं यदि सभी पुरुष एकही पक्ष में न हों ?

[नागपुर १९२६

(१८) ८ और ६ खिलाड़ियों के दो समूहों में से ११ खिलाड़ियों का क्रिकेट संघ के लिये चुनाव करना है। यदि ६ के समूह से कम से कम ४ को लेना हो तो कितने प्रकारों से चुनाव किया जा सकता है ?

[मद्रास १८९७

(१९) दो क्रिकेट दल हैं और प्रत्येक में १५ सदस्य हैं। यदि प्रथम दल का एक सदस्य क लेना हो और दूसरा सदस्य ख छोड़ना हो तो, प्रत्येक पक्ष में ११

खिलाड़ी चुनकर कितने प्रकारों से खेल का विन्यास किया जा सकता है। [अन्नामलाई १९३५

(२०) एक क्रिकेट दल में १४ सदस्य हैं जिनमें ५ गेंद फेंक सकते हैं। कम से कम ३ गेंद फेंकने वालों को लेकर ११ सदस्यों का चुनाव कितने प्रकारों से हो सकता है? [आन्ध्र १९४०

(२१) क्रिकेट के १६ खिलाड़ियों में ६ गेंद फेंकने वाले, और ३ विकेट रक्षक हैं। ११ खिलाड़ियों का चुनाव करना है। यदि ११ खिलाड़ियों में ४ गेंद फेंकने वाले और २ विकेट रक्षक हों तो चुनाव कितने प्रकारों से किया जा सकता है? [आन्ध्र १९३५

(२२) किसी भी अंक की पुनरावृत्ति न करके १, ३, ५, ७, अंकों के प्रयोग से बननेवाली १००० से बड़ी संख्याओं की संख्या और उनका योग निकालो।

(२३) १२ वस्तुओं में से प्रत्येक बार ५ वस्तुएं लेने पर ४ दत्त वस्तुएं सदैव कितने क्रमचयों में रहेंगी? [नागपुर १९२५

(२४) १० वस्तुओं में से प्रत्येक बार चार लेने पर उनके कितने क्रमचयों में एक विशेष वस्तु (१) सदैव रहेगी (२) कभी भी न रहेगी? [कलकत्ता १९३६

(२५) एक व्यक्ति अपने ४० मित्रों को भिन्न भिन्न समूहों में अधिक से अधिक भोज देना चाहता

है। प्रत्येक भोज में अतिथियों की संख्या समान है तो बताओ उसे प्रत्येक बार कितने मित्रों को बुलाना चाहिए और वह कुल कितने भोज देगा?
[बम्बई १८८४

(२६) एक व्यक्ति १२ मित्रों को भिन्न भिन्न समूहों में अधिक से अधिक भोज देना चाहता है। प्रत्येक भोज में अतिथियों की संख्या समान है। तो बताओ उसे प्रत्येक भोज में कितने व्यक्ति आमंत्रित करने चाहिएं और कितने भोजों में एक विशेष व्यक्ति बार बार आमंत्रित होगा?
[मैसूर १९३२

(२७) एक वाचनालय में संस्कृत की १६ और हिन्दी की ८ पुस्तकें हैं। संस्कृत की ४ और हिन्दी की ३ पुस्तकों के समूह को अलमारी के खाने में कितने प्रकारों से रखा जा सकता है?

(२८) ७ बिन्दु और ५ प्रासों (dashes) का किसी रेखा में कितने प्रकारों से विन्यास किया जा सकता है?

(२९) २ नीली, १ श्वेत, १ लाल, और १ काली पताकाओं से कितनी विभिन्न संज्ञप्तियां हो सकती हैं?

(३०) एक वाचनालय में एक पुस्तक की ५ प्रतियां, दो पुस्तकों की ४, ४ प्रतियां, तीन पुस्तकों की ६, ६ प्रतियां और ८ पुस्तकों की एक एक प्रति है। इन सब पुस्तकों का कितने प्रकारों से विन्यास किया जा सकता है?
[कलकत्ता १९३४

(३१) स वस्तुओं में से प्रत्येक बार 'न' वस्तुएं लेने पर प्राप्त होनेवाले क्रमचयों का अभिधान $\text{क्र}_{\text{न}}$ से होता हो तो दिखाओ कि

$$\text{क्र}_{१} + \frac{\text{क्र}_{२}}{\underline{|२}} + \frac{\text{क्र}_{३}}{\underline{|३}} + \ldots\ldots + \frac{\text{क्र}_{\text{स}}}{\underline{|\text{स}}} = २^{\text{स}} - १$$

[मद्रास १८८०

(३२) १५ गेंदों का कितने प्रकारों से विन्यास हो सकता है यदि उनमें ६ काली, ५ लाल और ४ श्वेत हों ?

(३३) ६ पताकाओं से विभिन्न संज्ञप्तियां करने की संख्या निकालो यदि उनमें २ श्वेत, २ काली, और २ लाल हों ?

(३४) ०, १, १, २, ३, ४ अंकों में से प्रत्येक बार चार, चार अंक लेकर १००० से बड़ी संख्याएं कितनी बनेंगी ?

[मद्रास १८८९

(३५) १, २, ३, ३, ३, ४ अंकों के प्रयोग से ४००० से छोटी संख्याएं कितनी बनेंगी ? [मद्रास १९१९

(३६) १२१२०२ संख्या के अंकों से ६ अंकों वाली विभिन्न संख्याएं कितनी बनेंगी ? [मद्रास १८८६

(३७) २, ३, ०, २, ३, ३ अंकों से ६ अंकों वाली कितनी संख्याएं बन सकती हैं ? [नागपुर १९४६

(३८) यदि आचार्य पद के लिए तीन प्रतिस्पर्धी हों और ५ मनुष्यों के मतों से एक का निर्वाचन करना हो तो कितने प्रकारों से मतदान हो सकता है ?

[बम्बई १८८८

(३९) ४ वलय हैं जिनमें से प्रत्येक पर ८ भिन्न भिन्न अक्षर हैं। इनसे भिन्न संकेतवाले कितने अक्षर-तालक (letter locks) बन सकते हैं?

(४०) एक निर्वाचन में ५ प्रतिस्पर्धी हैं और ३ का निर्वाचन करना है। मतदाता निर्वाचित होनेवाले प्रतिस्पर्धियों की संख्या से अधिक मत नहीं दे सकते। कितने प्रकारों से एक मतदाता मत दे सकता है?

(४१) १ रुपया, १ अठन्नी, १ चवन्नी, १ दुअन्नी, और १ इकन्नी, इन सिक्कों (coins) से कितने विभिन्न संकलन (sums) हो सकते हैं?

(४२) ३ लाल, २ नीली, २ पीली, १ हरी, १ श्वेत, और १ बैंगनी पताकाओं में से ४ पताकाओं के (१) चुनाव की और (२) विन्यास के संभाव्य प्रकारों की संख्या निकालो।

(४३) द्वादश भुज के कोण-बिन्दुओं को जोड़ने से कितने त्रिकोण प्राप्त होंगे?

(४४) एक समतल में न बिन्दु हैं जिनमें संरेख म बिन्दुओं को छोड़कर कोई भी तीन बिन्दु एक सरल रेखा में नहीं हैं। बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त होने वाली (१) विभिन्न रेखाओं और (२) त्रिकोणों की संख्या निकालो।

(४५) एक रेल मार्ग पर स स्थान (stations) हैं। यदि गाड़ी के ठहरने के कोई दो स्थान अनुगामी (consecutive) न हों तो दिखाओ कि कोई गाड़ी इनमें किन्हीं तीन स्थानों पर

$\frac{1}{6}$ (स – २) (स – ३) (स – ४) प्रकारों से ठहर सकती है।

४६) एक रेल-मार्ग पर १० स्थान हैं। यदि किसी एक स्थान से दूसरे स्थान के लिए तृतीय श्रेणी के पत्रक (tickets) मिल सकते हों तो बताओ कि तृतीय श्रेणी के कितने पत्रक छपने चाहिएं ?

(४८) एक दूरलिख साधित्र की ५ भुजाएं हैं, जिनमें प्रत्येक विश्राम-स्थिति समेत ४ स्पष्ट संज्ञप्तियां भेजने में समर्थ है। दिखाओ कि संज्ञप्तियों कि संख्या १०२३ है।

दसवां अध्याय

गणितीय अनुमान

(mathematical induction)

१०.१ नीचे दिए उदाहरणों के अध्ययन से गणितीय अनुमान की रीति विद्यार्थियों की समझ में भली भांति आजायगी।

उदाहरण १— सिद्ध करो कि प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं का योग $\frac{स (स+१)}{२}$ है।

यह सिद्ध करना है कि

$$१+२+३+\ldots\ldots +स = \frac{स (स+१)}{२}$$

[स की सब अर्हाओं के लिए

अब $१ = \frac{१}{२} [१+१]$ .... (१)

अतः प्रमेय स = १ के लिए सत्य है।

पुनः प्रथम दो पदों का योग

$$१+२=\frac{१}{२}\ [१+१]+२$$

[(१) का प्रयोग करने से

$$=\frac{२}{२}\ [२+१] \quad ....(२)$$

अतः प्रमेय स=२ के लिए सत्य है।

$$पुनः\quad (१+२)+३=\frac{२}{२}\ [२+१]+३$$

[(२) का प्रयोग करने से

$$=६$$

$$=\frac{३}{२}\ [३+१]$$

अतः प्रमेय स=३ के लिए सत्य है।

यहां यह ध्यान में रखना आवश्यक है कि प्रत्येक फल का उपपादन पिछले फल के उपपादन पर निर्भर रखा गया है।

मान लो स की विशेष अर्हा त है। अब त के लिए इस सूत्र की सत्यता की कल्पना करो। अब यह सिद्ध किया जायगा कि यह स की आगामी उच्चतर अर्हा अर्थात् (त+१) के लिए भी सत्य है।

$$१+२+३+...\ +त = \frac{त\ (त+१)}{२} \text{ सत्य है}.. ....(४)$$

दोनों पक्षों में (त+१) जोड़ो।

$$\therefore \quad (१+२+३+\ldots\ldots+त)+(त+१)$$

$$=\frac{१}{२}त(त+१)+(त+१)$$

$$=\frac{१}{२}(त+१)\;(त+२)$$

अर्थात् फल, स = त + १ के लिए सत्य है। अतः यदि उक्त कल्पना स = त के लिए सत्य हो तो वह स = त + १ के लिए भी सत्य होगी। अर्थात् प्रमेय जहां भी स की किसी विशेष अर्हा के लिए सत्य है वहां वह स की आगामी उच्चतर अर्हा के लिए भी सत्य होगा।

यह दिखाया गया है कि प्रमेय स = १ के लिये सत्य है। अतः स = २, ३ के लिये सत्य है। अब यह स = ३ के लिए सत्य है इसलिए स की आगामी उच्चतर अर्हा अर्थात् ४ के लिए भी सत्य है।

यह स = ४ के लिए सत्य है इसलिए स की आगामी उच्चतर अर्हा अर्थात् ५ के लिए भी सत्य है।

इस विधा के लगातार प्रयोग करने से अन्ततः यह सिद्ध किया जा सकता है कि, स की किसी भी विशिष्ट धन पूर्णांक अर्हा के लिए प्रमेय सत्य है। इससे प्रमेय की उपपत्ति का पूर्णतः स्थापन हो जाता है।

उदाहरण २ — गणितीय अनुमान की रीति से यह सिद्ध करो कि यदि स कोई धन पूर्णांक हो तो (य − र) यह $य^स - र^स$ का खण्ड है।

यह स्पष्ट है कि स = १ लिये य − र यह $य^स - र^स$ का खण्ड है। पुनः स = २ के लिए $य^स - र^स$, $(य^२ - र^२)$ होता है।

अब $य^{2} - र^{2} = य(य - र) + र(य - र)$ ....(२)

क्योंकि दक्षिण पक्ष के दोनों पदों में (य − र) खण्ड है, इसलिए स्पष्टतः $य^{2} - र^{2}$ में (य − र) खण्ड है । अतः प्रमेय स = २ के लिए सत्य है। पुनः स = ३ के लिए

$$य^{3} - र^{3} = य \times य^{2} - य \times र^{2} + य \times र^{2} - र \times र^{2}$$
$$= य(य^{2} - र^{2}) + र^{2}(य - र)$$

(१) और (२) का प्रयोग करने से यह सिद्ध होता है कि $(य^{3} - र^{3})$ में य − र खण्ड है।

अतः $य^{स} - र^{स}$ में स = ३ के लिए य − र खण्ड है। अनुमान करो कि स की विशेष कल्पित अर्हा त के लिए $य^{स} - र^{स}$ में (य − र) खण्ड है। अब यह सिद्ध किया जायगा कि स की आगामी उच्चतर अर्हा अर्थात् स = न + १ के लिए भी $(य^{स} - र^{स})$ में य − र खण्ड है।

$$\text{अब } य^{त+1} - र^{त+1} = य \times य^{त} - य \times र^{त} + य \times र^{त} - र \times र^{त}$$
$$= य[य^{त} - र^{त}] + र^{त}[य - र]$$

यह कल्पना की गई है कि $य^{त} - र^{त}$ का य − र खण्ड है और यह स्पष्ट है कि य − र, $र^{त}(य - र)$ का खण्ड है। क्योंकि दक्षिण पक्ष के दोनों पदों में य − र खण्ड है इसलिए य − र वाम पक्ष का भी खण्ड है।

अतः यदि यह कल्पना कि $य^{त} - र^{त}$ का य − र खण्ड है सत्य हो तो वह $य^{त+1} - र^{त+1}$ का भी खण्ड होगा। यह दिखाया गया है कि स = १ के लिए $य^{स} - र^{स}$ में (य − र) खण्ड है, अतः स = २, ३ के लिए भी खण्ड है। क्योंकि य − र, $य^{स} - र^{स}$ का स = ३ के लिए खण्ड है, इसलिए वह $य^{स} - र^{स}$

:

का स=४ के लिए भी खण्ड होगा। अतः य−र, $य^४-र^४$ का खण्ड है। क्योंकि य−र, $य^स-र^स$ का स=४ के लिए खण्ड है, इसलिए वह $य^स-र^स$ का स=५ के लिए भी खण्ड होगा। अतः य−र, $य^५-र^५$ का खण्ड है।

इस विधा के लगातार प्रयोग से यह पूर्णतः स्थापित हो जाता है कि 'स' की सब धनपूर्णांक अर्हाओं के लिए, $य^स-र^स$ में य−र खण्ड है।

प्रश्नावलि १५

गणितीय अनुमान की रीति से सिद्ध करो—

(१) $१^२+२^२+३^२+\ldots\ldots+स^२=\frac{स(स+१)(२स+१)}{६}$

(२) $१^३+२^३+३^३+\ldots\ldots+स^३=\left[\frac{स(स+१)}{२}\right]^२$

(३) $१+३+५+\ldots\ldots\ldots+(२स-१)=स^२$

(४) $१\times२+२\times३+३\times४+\ldots\ldots\ldots+स(स+१)$
$=\frac{स(स+१)(स+२)}{३}$

(५) $क+(क+च)+(क+२च)+\ldots+[क+(स-१)च]$
$=\frac{स}{२}\left[२क+(स-१)च\right]$

(६) $क + कन + कन^{२} + \dots\dots + कन^{स-१} = \frac{क[१ - न^{स}]}{१ - न}$

(७) सिद्ध करो कि स की अयुग्म धन पूर्णांक अहों के लिए $य^{स} + र^{स}$, $य + र$ से भाज्य है।

(८) $\frac{१}{१ \times २} + \frac{१}{२ \times ३} + \dots\dots + \frac{१}{स(स+१)} = \frac{स}{स+१}$

ग्यारहवां अध्याय

द्विपद प्रमेय

(binomial theorem)

धन पूर्णांक घात

११.१ प्रत्यक्ष गुणन से प्राप्त किए गए इन फलों पर विचार करो।

$$(य+क_१)(य+क_२) = य^२ + (क_१+क_२)य + क_१क_२$$

$$(य+क_१)(य+क_२)(य+क_३)$$

$$= [य^२ + (क_१+क_२)य + क_१क_२][य+क_३]$$

$$= य^३ + (क_१+क_२+क_३)य^२ + (क_१क_२+क_२क_३+क_३क_१)य + क_१क_२क_३$$

$$(य+क_१)(य+क_२)(य+क_३)(य+क_४)$$

$$= [य^३ + (क_१+क_२+क_३)य^२ + (क_१क_२+क_२क_३+क_३क_१)य + क_१क_२क_३ + क_१क_२क_३] \times [य+क_४]$$

$$= य^४ + (क_१+क_२+क_३+क_४)य^३$$

$$+[क_1क_2+क_1क_3+क_1क_4+क_2क_3$$
$$+क_2क_4+क_3क_4]य^2$$
$$+[क_1क_2क_3+क_1क_2क_4+क_1क_3क_4$$
$$+क_2क_3क_4]य$$
$$+क_1क_2क_3क_4$$

यदि खण्डों की संख्या कम हो तो प्रत्यक्ष गुणनफल सरलता से मिलता है, किन्तु खण्डों की संख्या अधिक हो तो गुणन-विधा दीर्घसूत्री होती है। अतः ऐसी अवस्था में गुणनफल पाने के लिए किसी दूसरी विधा की सहायता लेनी होगी। दाहिनी ओर के भिन्न भिन्न पदों का निरीक्षण करो और अन्त के गुणनफल पर जिसमें चार द्विपद खण्डों का गुणन किया गया है, विचार करो।

सम्पूर्ण गुणनफल अनेक आंशिक गुणनफलों का योग है और प्रत्येक आंशिक गुणनफल सब संभाव्य प्रकारों से वाम पक्ष के चार खण्डों में से प्रत्येक से केवल एक अक्षर लेने पर प्राप्त ४ अक्षरों का गुणनफल है।

अब आंशिक गुणनफलों पर विचार करो।

(१) वाम पक्ष के चारों खण्डों में से प्रत्येक से 'य' अक्षर लेने पर गुणन-फल $य^4$ होता है। इस प्रकार पहला पद $य^4$ बनता है।

(२) सब संभाव्य प्रकारों से चुने गए किन्हीं तीन खण्डों में से प्रत्येक से 'य' लेने पर और शेष खण्ड में से $क_1$, $क_2$, $क_3$, और $क_4$, में से एक अक्षर लेने

पर जो गुणनफल प्राप्त होते हैं उनके योग से दूसरा पद बनता है।

$(क_1+क_2+क_3+क_4)\ य^3$ यह द्वितीय पद है।

(३) सब संभाव्य प्रकारों से चुने गए किन्हीं दो खण्डों में से प्रत्येक से 'य' लेने पर और शेष दो खण्डों में से $क_1, क_2, क_3$ और $क_4$ में से कोई दो अक्षर लेने पर जो ($^4च_2$) गुणनफल प्राप्त होते हैं उनके योग से तीसरा पद बनता है।

(४) सब संभाव्य प्रकारों से चुने गए चार खण्डों में से किसी भी एक खण्ड से 'य' लेने पर और शेष खण्डों में से, $क_1, क_2, क_3$ और $क_4$ में से कोई भी तीन लेने पर जो गुणनफल ($^4च_3$) प्राप्त होते हैं उनके योग से चौथा पद बनता है।

(५) अन्तिम पद (पांचवां) य-विरहित है और $क_1, क_2, क_3$ तथा $क_4$ इन चार राशियों का गुणनफल है।

उक्त विधा से इन उदाहरणों का साधन किया गया है—

उदाहरण १— $(य-१)(य+३)(य+४)(य-८)$ को गुणा करो।

$$\begin{aligned}गुणनफल &= य^4+[-१+३+४-८]य^3\\ &+[(-१)\ (३)+(-१)\ (४)+(-१)\ (-८)\\ &\qquad +३\times४+३(-८)+४(-८)]य^2\\ &+[(-१)(३)(४)+(-१)(३)(-८)\\ &\qquad +३\times४(-८+(-१)(४)(-८)]य\\ &+(-१)(३)(४)(-८)\\ &=य^4-२य^3-४३य^2-५२य+९६\end{aligned}$$

उदाहरण २—

$(य+३)(य-५)(य+१)(य+२)(य-८)$ के गुणनफल में $य^२$ का गुणक (coefficient) निकालो।

$य^२$ को धारण करने वाले पद किन्हीं भी दो खण्डों में से लिए गए य के और शेष खण्डों में से ली गई तीन संख्यात्मक राशियों के गुणनफल से बनते हैं। अतः $य^२$ का गुणक, ३, −५, १, २, −८ इन राशियों में से तीन तीन करके प्रत्येक बार ली गई राशियों के गुणनफल के योग के सम है।

∴ अपेक्षित गुणक

$$= ३(-५)१ + ३(-५)२ + ३(-५)(-८) + ३\times१\times२$$
$$+ ३\times१(-८) + ३\times२(-८) + (-५)(१)(२)$$
$$+ (-५)१(-८) + १\times२(-८) + (-५)२(-८)$$
$$= -१५ - ३० + १२० + ६ - २४ - ४८ - १० + ४० - १६ + ८०$$
$$= १०३$$

११.२ न द्विपद खण्डों का गुणनफल —

$(य+क_१)(य+क_२)(य+क_३)$ .... $(य+क_न)$ के गुणनफल पर विचार करो।

न द्विपद खण्डों के गुणनफल को प्राप्त करने के लिए गत अनुच्छेद में चार द्विपद खण्डों के गुणन के लिए दी गई रीति का अनुसरण किया जायगा।

सब संभाव्य प्रकारों से न खण्डों में से प्रत्येक से एक

अक्षर चुनकर उन सबके गुणनफल से प्राप्त आंशिक गुणनफलों के योग से सम्पूर्ण गुणनफल प्राप्त होता है। अतः अन्तिम फल में आनेवाले प्रत्येक पद की विमा (dimensions) स होती है।

य का उच्चतम घातीय पद $य^{स}$ है और यह प्रत्येक खण्ड में से य को लेकर उनके गुणनफल से बनता है।

सब संभाव्य प्रकार से चुने हुए किन्हीं (स – १) खण्डों में के प्रत्येक से य को लेकर और $क_1, क_2, क_3, \ldots\ldots क_स$, इनमें से कोई भी एक अक्षर लेकर $य^{स-1}$ को धारण करने वाले पद बनते हैं। अतः अन्तिम गुणनफल में $य^{स-1}$ का गुणक $क_1, क_2, क_3, \ldots\ldots क_स$ इन अक्षरों के योग के सम है। इस योग का $यो_1$ से अभिधान करो। यह स्पष्ट है कि जिन पदों से $यो_1$ बनता है उनकी संख्या $^{स}च_1$ के सम है।

सब संभाव्य प्रकारों से चुने गए किन्हीं (स – २) खण्डों में के प्रत्येक से य को लेकर और शेष खण्डों में से $क_1, क_2, क_3, \ldots क_स$, में से कोई दो अक्षर लेकर $य^{स-2}$ को धारण करने वाले पद बनते हैं। अतः अन्तिम गुणनफल में $य^{स-2}$ का गुणक $क_1, क_2, क_3, \ldots\ldots क_स$ अक्षरों में से प्रत्येक बार लिए गए दो अक्षरों के गुणनफल के योग के सम है। इस योग का $यो_2$ से अभिधान करो। $यो_2$ में पदों की संख्या $^{स}च_2$ है।

अब सामान्यपद अर्थात् $य^{स-न}$ को धारण करने वाला पद . लिखा जा सकता है।

सब संभाव्य प्रकारों से चुने गए किन्हीं (स − न) खण्डों में के प्रत्येक से य लेकर और क_1, क_2, क_3, …… $\text{क}_\text{स}$ में से कोई भी न अक्षर लेकर $\text{य}^{\text{स}-\text{न}}$ को धारण करने वाले पद बनते हैं। अतः $\text{य}^{\text{स}-1}$ का गुणक $\text{क}_1, \text{क}_2, \text{क}_3, \ldots\ldots \text{क}_\text{स}$ अक्षरों में से प्रत्येक बार लिए गए न अक्षरों के गुणनफल के योग के सम है। इसका $\text{यो}_\text{न}$ से अभिधान करो। $\text{यो}_\text{न}$ में समस्त पदसंख्या ${}^{\text{स}}\text{च}_\text{न}$ है।

य से स्वतंत्र पद $\text{क}_1, \text{क}_2; \text{क}_3 \ldots\ldots \text{क}_\text{स}$ अक्षरों का गुणनफल है। इसका $\text{यो}_\text{स}$ से अभिधान करो।

अतः य के अवरोही घातों में विन्यस्त किया गया सम्पूर्ण गुणनफल

$$
\begin{aligned}
&= \text{य}^{\text{स}} + [\text{क}_1 + \text{क}_2 + \ldots\ldots \text{क}_\text{स}]\text{य}^{\text{स}-1} \\
&\quad + [\text{क}_1\text{क}_2 + \text{क}_1\text{क}_3 + \ldots\ldots]\,\text{य}^{\text{स}-2} \\
&\quad + [\text{क}_1\text{क}_2\text{क}_3 + \text{क}_1\text{क}_2\text{क}_4 + \ldots\ldots]\text{य}^{\text{स}-3} \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + [\text{क}_1\text{क}_2\text{क}_3 \ldots\ldots \text{क}_\text{न} + \ldots\ldots]\text{य}^{\text{स}-\text{न}} \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + [\text{क}_1\text{क}_2\text{क}_3 \ldots \text{क}_{\text{स}-1} + \ldots]\text{य} + [\text{क}_1\text{क}_2\text{क}_3 \ldots \text{क}_\text{स}] \\
&= \text{य}^{\text{स}} + \text{यो}_1\text{य}^{\text{स}-1} + \text{यो}_2\text{य}^{\text{स}-2} + \ldots\ldots\ldots + \text{यो}_\text{न}\text{य}^{\text{स}-\text{न}} \\
&\qquad + \ldots\ldots \quad + \text{यो}_{\text{स}-1}\text{य} + \text{यो}_\text{स}
\end{aligned}
$$

११.२१ अब यदि $\text{क}_1, \text{क}_2, \ldots\ldots\ldots \text{क}_\text{स}$ में से प्रत्येक

'क' के सम लिया जाय तो यो$_1$ का $^स च_1$ क में, यो$_2$ का $^स च_2$ क^2 में.......यो$_न$ का $^स च_न$ क^न में......यो$_{स-1}$ का $^स च_{स-1}$ क$^{स-1}$ में, और यो$_स$ का क^स में परिवर्तन हो जाता है।

अतः स द्विपद खण्डों का गुणनफल जिनमें से प्रत्येक (य + क) के सम है,

$$(य+क)^स = य^स + {}^स च_1\, कय^{स-1} + {}^स च_2\, क^2 य^{स-2} + \ldots\ldots + {}^स च_न क^न य^{स-न} + \ldots\ldots + {}^स च_{स-1} क^{स-1} य + क^स$$

से व्यक्त किया जा सकता है।

यह स्पष्ट है कि ऊपर के फल में पदों की संख्या (स + 1) है।

$(य + क)^स$ का उपर्युक्त विस्तार धन पूर्णांक घात के लिए द्विपद विस्तार कहलाता है।

११.२२ $(य + क)^स$ के उपर्युक्त विस्तार में यदि य और क का व्यतिहरण किया जाय तो

$$(क+य)^स = क^स + {}^स च_1\, य क^{स-1} + {}^स च_2\, य^2 क^{स-2} + \ldots\ldots + {}^स च_न य^न क^{स-न} + \ldots\ldots + {}^स च_{स-1} य^{स-1} क + य^स$$

प्राप्त होगा।

दोनों विस्तारों की तुलना से यह ज्ञात होता है कि पहले का विन्यास य के अवरोही घातों में और दूसरे का य के आरोही घातों में है।

यदि द्वितीय विस्तार में क = १ रखा जाय तो

$$(१ + य)^स = १ + {}^स च_1\, य + {}^स च_2\, य^2 + \ldots + {}^स च_न य^न + \ldots + {}^स च_{स-1} य^{स-1} + य^स$$

इस विस्तार में के ${}^{स}च_{१}, {}^{स}च_{२}, \ldots {}^{स}च_{न}$ द्विपद गुणक (binomial coefficients) कहलाते हैं।

सामान्य पद का $प_{न+१}$ से अभिधान करने पर

$$प_{न+१} = {}^{स}च_{न} य^{न}$$

$$= \frac{स(स-१)(स-२)\ldots\ldots(स-न+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots\ldots न} \times य^{न}$$

$$= \frac{\lfloor स}{\lfloor न \; \lfloor स-न} य^{न}.$$

इससे

$$(१+य)^{स} = १ + सय + \frac{स(स-१)}{\lfloor २} य^{२} + \frac{स(स-१)(स-२)}{\lfloor ३} य^{३}$$

$$+ \ldots + \frac{स(स-१)(स-२)\ldots(स-न+१)}{\lfloor न} य^{न} + \ldots + य^{स}$$

यह द्विपद विस्तार का सरलतम रूप है। अब $(य+र)^{स}$ के समान रू-घातीय द्विपद विस्तार, उस विस्तार पर अवलंबित किया जा सकता है जिसमें प्रथम पद एक हो। इस के पश्चात् ऊपर दिए गए द्विपद प्रमेय के सरलतम रूप का उपयोग किया जा सकता है। यह इन उदाहरणों से स्पष्ट होगा—

उदाहरण १— $(य+र)^{स}$ का विस्तार करो।

$$\text{अब } (य+र)^{स} = \left[य\left(१+\frac{र}{य}\right) \right]^{स}$$

$$= य^{स}\left(१+\frac{र}{य}\right)^{स}$$

$\frac{र}{य} = ल$ रखने पर

$$(य+र)^{स} = य^{स}\ (१+ल)^{स}$$

$$= य^{स}[१ + {}^{स}च_{१}ल + {}^{स}च_{२}ल^{२} + \ldots + {}^{स}च_{न}ल^{न} + \ldots$$
$$\ldots + {}^{स}च_{स}ल^{स}]$$

$$= य^{स}[१ + {}^{स}च_{१}\ \frac{र}{य} + {}^{स}च_{२}\ \frac{र^{२}}{य^{२}} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ {}^{स}च_{न}\ \frac{र^{न}}{य^{न}} + \ldots + {}^{स}च_{स}\ \frac{र^{स}}{य^{स}}$$

$$= य^{स} + {}^{स}च_{१}\ रय^{स-१} + {}^{स}च_{२}\ र^{२}य^{स-२} + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + {}^{स}च_{न}\ र^{न}य^{स-न} + \ldots + {}^{स}च_{स}\ र^{स}$$

उदाहरण २— $(य+क)^{७}$ का विस्तार करो।

$$(य+क)^{७} = य^{७} + {}^{७}च_{१}कय^{६} + {}^{७}च_{२}क^{२}य^{५} + {}^{७}च_{३}क^{३}य^{४}$$
$$+ {}^{७}च_{४}क^{४}य^{३} + {}^{७}च_{५}क^{५}च^{२} + {}^{७}च_{६}क^{६}य$$
$$+ {}^{७}च_{७}क^{७}$$

$$= य^{७} + ७कय^{६} + २१क^{२}य^{५} + ३५क^{३}य^{४}$$
$$+ ३५क^{४}य^{३} + २१क^{५}य^{२} + ७क^{६}य + क^{७}$$

उदाहरण ३— $(२य-र)^५$ का विस्तार करो।

$(य+क)^न$ से $(२य-र)^५$ की तुलना करने पर यह ज्ञात होता है कि इस द्विपद में य के स्थान पर २य है और क के स्थान पर $(-र)$ है। पिछले उदाहरण कीरीति का अनुसरण करने पर

$$\begin{aligned}(२य-र)^५ &= (२य)^५ + {}^५च_१ (-र)(२य)^४ \\ &\quad + {}^५च_२(-र)^२(२य)^३ + {}^५च_३(-र)^३(२य)^२ \\ &\quad + {}^५च_४ (-र)^४ (२य) + {}^५च_५ (-र)^५ \\ &= ३२ य^५ - ८० र य^४ + ८० र^२य^३ - ४० र^३य^२ \\ &\quad + १० र^४य - र^५\end{aligned}$$

उदाहरण ४—

$(य+\sqrt{३})^५ + (य-\sqrt{३})^५$ की अर्हा निकालो।

$$\begin{aligned}&(य+\sqrt{३})^५ + (य-\sqrt{३})^५ \\ &= [य^५ + {}^५च_१(\sqrt{३})य^४ + {}^५च_२(\sqrt{३})^२य^३ + {}^५च_३(\sqrt{३})^३य^२ \\ &\qquad + {}^५च_४(\sqrt{३})^४य + {}^५च_५(\sqrt{३})^५] \\ &\quad + [य^५ + {}^५च_१(-\sqrt{३})य^४ + {}^५च_२(-\sqrt{३})^२य^३ \\ &\qquad + {}^५च_३(-\sqrt{३})^३य^२ + {}^५च_४(-\sqrt{३})^४य \\ &\qquad + {}^५च_५(-\sqrt{३})^५] \\ &= २य^५ + २\,{}^५च_२(\sqrt{३})^२य^३ + २\,{}^५च_४(\sqrt{३})^४य \\ &= २य^५ + ६०य^३ + ९० य\end{aligned}$$

११.३ $(य+क)^स$ के विस्तार में किसी पद को निकालना।

$(य+क)^स$ के विस्तार में

प्रथम पद $य^स$ अथवा ${}^सच_० य^स$ है।

द्वितीय पद ${}^सच_१ क य^{स-१}$ है।

तृतीय पद ${}^सच_२ क^२ य^{स-२}$ है।

चतुर्थ पद ${}^सच_३ क^३ य^{स-३}$ है.........इत्यादि

इन पदों में ये सामान्य गुण स्पष्ट हैं—

(१) च का पादांक पद-संख्या से १ कम है।

(२) क का घात और च का पादांक एकही है।

(३) क और य के घातों का योग द्विपद के घात के सम है।

अतः यदि (त+१)वें पद का अभिधान $प_{त+१}$ से किया जाय

तो $प_{त+१} = {}^सच_त क^त य^{स-त}$

११.३१ $(१+य)^स$ के विस्तार में आदि और अन्त से समदूर पदों में के गुणक समान होते हैं।

यह ज्ञात है कि

$$(१+य)^स = १ + {}^सच_१ य + {}^सच_२ य^२ + \dots + {}^सच_त य^त + \dots\dots + {}^सच_{स-१} य^{स-१} + य^स$$

इस विस्तार में पदों की संख्या (स+१) है।

आदि से त वें पद में निहित गुणक ${}^सच_{त-१}$ के सम है।

अन्त से $त^{वां}$ पद आदि से $(स+२-त)^{वां}$ पद होगा ।

अतः इस पद में निहित गुणक $= {}^{स}च_{स+१-त}$

$$= {}^{स}च_{स-(स+१-त)}$$

$$= स_{त-१}$$

अतः आदि और अन्त से समदूर पदों में निहित गुणक समान होते हैं ।

११.४ कुछ साधित प्रश्न—

उदाहरण १— $(य-र)^{६}$ के विस्तार में $४^{था}$ पद निकालो ।

$$४^{था}\ पद = {}^{६}च_{३}(-र)^{३}य^{३}$$

$$= -\frac{६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३}र^{३}य^{३}$$

$$= -२०र^{३}य^{३}$$

उदाहरण २— $(य-क)^{१६}$ के विस्तार में $१३^{वां}$ पद निकालो ।

$$१३^{वां}\ पद = {}^{१६}च_{१२}(-क)^{१२}य^{४}$$

$$= {}^{१६}च_{४}क^{१२}य^{४}$$

$$= \frac{१६ \times १५ \times १४ \times १३}{१ \times २ \times ३ \times ४}क^{१२}य^{४}$$

$$= १८२०\ क^{१२}य^{४}$$

उदाहरण ३— $\left(य^{२} - \frac{३}{य}\right)^{१५}$ के विस्तार में $य^{१८}$ का गुणक निकालो ।

मान लो $य^{१८}$, $(त+१)^{वें}$ पद में आता है।

अब $\left(य^{२}-\frac{३}{य}\right)^{१५}=य^{३०}\left(१-\frac{३}{य^{३}}\right)^{१५}$

$\left(१-\frac{३}{य^{३}}\right)^{१५}$ के विस्तार का प्रत्येक पद $य^{३०}$ से गुणित है।

$\therefore\quad प_{त+१}=य^{३०}\left[\left(१-\frac{३}{य^{३}}\right)^{१५} \text{ के विस्तार का } (त+१)^{वां} \text{ पद}\right]$

$$=य^{३०}\times {}^{१५}च_{त}\left(-\frac{३}{य^{३}}\right)^{त}$$

$$=(-३)^{त}\times {}^{१५}च_{त}\times य^{३०-३त}$$

किन्तु इस पद में य का घात १८ है।

$\therefore\quad ३० - ३त = १८$

$३त = १२$

$त = ४$

$\therefore$ अपेक्षित गुणक $=(-३)^{४}\times {}^{१५}च_{४}$

$$=\frac{३^{४}\times१५\times१४\times१३\times१२}{१\times२\times३\times४}$$

$$=११०५६५$$

उदाहरण ४— $\left(य+\frac{ग}{य^{२}}\right)^{स}$ के विस्तार में $य^{त}$ का गुणक

निकालो।

मान लो $\left(य+\frac{ग}{य^२}\right)^{स}$ के विस्तार में $य^{त}$; $(ठ+१)$वें पद में आता है।

$$अब \quad \left(य+\frac{ग}{य^२}\right)^{स}=य^{स}\left(१+\frac{ग}{य^३}\right)^{स}$$

$$\therefore \; प_{ठ+१}=य^{स}\left[\left(१+\frac{ग}{य^३}\right)^{स} \text{के विस्तार का } (ठ+१)\text{वां पद}\right]$$

$$=य^{स}\times {}^{स}च_{ठ}\left(\frac{ग}{य^३}\right)^{ठ}$$

$$={}^{स}च_{ठ}\times य^{स-३ठ}\times ग^{ठ}$$

किन्तु इस पद में य का घात त है

$$\therefore स-३ठ=त$$

$$अथवा \; ठ=\frac{स-त}{३}$$

$$\therefore \; अपेक्षित \; गुणक={}^{स}च_{\frac{स-त}{३}} \; ग^{\frac{स-त}{३}}$$

$$=\frac{\lfloor स}{\lfloor \frac{स-त}{३} \; \lfloor \frac{२स+त}{३}} ग^{\frac{स-त}{३}}$$

प्रश्नावलि १६

(१) (य − ३) (य + ४) (य − ८) (य + ७) का विस्तार करो

(२) (क) (य − २) (य + ३) (य − ५) (य + ९) के गुणनफल में $य^{३}$ का गुणक निकालो।

(ख) (य + १) (य + २) (य + ३) (य − ४) (य − ५) (य − ६) के गुणनफल में $य^{४}$ का गुणक निकालो।

(३) इन द्विपदों का विस्तार करो—

(क) $(य+२)^{५}$ (ख) $(२य+३र)^{४}$

(ग) $(५-४य)^{४}$ (घ) $\left(१-\frac{१}{य}\right)^{६}$

(ङ) $\left(य^{२}+\frac{३क}{य}\right)^{५}$ (च) $\left(३य-\frac{५}{य^{२}}\right)^{५}$

(४) निम्न-लिखित द्विपद विस्तारों में निर्दिष्ट पद निकालो और सरल करो—

(अ) $(३क^{२}-७य^{२})^{८}$ में ५वाँ पद

(आ) $\left(\frac{क}{य}+\frac{य}{क}\right)^{११}$ में २वाँ पद

(इ) $\left(\frac{य}{क}-\frac{क}{य}\right)^{१०}$ में ४था पद [कलकत्ता १८८८

(ई) $(२य^{\frac{१}{२}}-र^{\frac{१}{३}})^{२०}$ में १९वां पद [कलकत्ता १८७०

(५) $(य-य^{२})^{१०}$ के विस्तार में $य^{१५}$ का गुणक निकालो
[कलकत्ता १९२६

(६) $(क^{४}-खय^{३})^{१०}$ के विस्तार में $य^{१७}$ और $य^{१८}$ के गुणक निकालो। [कलकत्ता १८७६

(७) $(य-२र)^{१३}$ में $य^{११}$ का गुणक निकालो।
[कलकत्ता १८८३

(८) $\left(य+\frac{ग^{3}}{य^{3}}\right)$ के विस्तार में $\frac{१}{य^{१}}$ का गुणक निकालो।

(९) $\left(३य-\frac{१}{३य}\right)^{१०१}$ के विस्तार में $य^{३१}$ का गुणक निकालो।

(१०) $\left(य-\frac{३क^{३}}{य^{२}}\right)^{२स}$ के विस्तार में $य^{स}$ का गुणक निकालो।

(११) $(य-य^{-१})^{३स}$ के विस्तार में $(२स+१)$वाँ पद निकालो।

(१२) दिखाओ कि $(१+य)^{२स}$ के विस्तार में $य^{स}$ का गुणक, $(१+य)^{२स-१}$ के विस्तार में $य^{स}$ के गुणक का दुगना है।

(१३) दिखाओ कि $(१+य)^{२स}$ के विस्तार में मध्यपद $\frac{१ \times ३ \times ५ \ldots\ldots (२स-१)}{\underline{|स}} २^{स} \times य^{स}$ है।

(१४) $(क+य)^{१३}$ के विस्तार में मध्यपद निकालो।

(१५) $\left(\frac{३}{य} - \frac{य}{३}\right)^{११}$ के विस्तार में मध्यपद निकालो।

(१६) $\left(य^{२} - \frac{३}{य^{३}}\right)^{१०}$ के विस्तार में य से स्वतन्त्र पद निकालो।

(१७) $\left(य + \frac{१}{य}\right)^{२स}$ के विस्तार में य से स्वतन्त्र पद निकालो।

(१८) $\left(य^{२} + \frac{१}{य}\right)^{१२}$ के विस्तार में य से स्वतन्त्र पद निकालो। [कलकत्ता १९३४

(१९) $\left(२य + \frac{१}{३य^{२}}\right)^{९}$ के विस्तार में य से स्वतन्त्र पद निकालो। [कलकत्ता १९३६

(२०) यदि $(१+य)^{४३}$ के विस्तार में $(२न+१)$वें पद में निहित गुणक (न+२]वें पद में निहित गुणक के सम हो तो न की महा निकालो। [पटना १९३०

(२१) यदि $(१+य)^{२स+१}$ के विस्तार में $य^न$ और $य^{स+१}$ के गुणक समान हों तो न की अर्हा निकालो।

[कलकत्ता १९३०

(२२) दिखाओ कि $(१+य)^{२स}$ के विस्तार में मध्य-पद में निहित गुणक, $(१+य)^{२स-१}$ के विस्तार में दो मध्य-पदों में निहित गुणकों के योग के सम है।

[कलकत्ता १९१८

(२३) सिद्ध करो कि $(१+य)^{ट+ठ}$ के विस्तार में $य^ट$ और $य^ठ$ के गुणक समान हैं जहां ट और ठ धन पूर्णांक हैं।

(२४) यदि $(१+य)^{२८}$ के विस्तार में नवें पद में निहित गुणक (न+४)वं पद में निहित गुणक के सम हो तो न की अर्हा निकालो।

११.५ त्रिपद के विस्तार के लिए भी द्विपद प्रमेय का प्रयोग किया जा सकता है।

उदाहरण— $(१+य+य^२)^स$ का विस्तार य के आरोही घातों में करो।

$(य+य^२)$ को एक पद समझ कर, द्विपद प्रमेय का प्रयोग करने पर

$$[१+(य+य^२)]^स$$
$$=१+{}^सच_१(य+य^२)+{}^सच_२(य+य^२)^२$$
$$+{}^सच_३(य+य^२)^३+\ldots\ldots+(य+य^२)^स$$
$$=१+{}^सच_१य(१+य)+{}^सच_२य^२(१+य^१)^२$$
$$+सच_३य^३(१+य)^३+\ldots\ldots+य^स(१+य)^स$$

अब $(१+य)^२$, $(१+य)^३$ ...... $(१+य)^स$ का द्विपद प्रमेय के अनुसार विस्तार किया जा सकता है। विस्तार करने पर पदों के पुनर्विन्यास से

$$[१+य+य^२]^स$$
$$=१+{}^सच_१ य+({}^सच_१+{}^सच_२)य^२ +({}^सच_१+२{}^सच_२+{}^सच_३)य^३+\ldots\ldots$$

प्राप्त होता है।

११.६ $(१+य)^स$ के विस्तार में संख्या की दृष्टि से महत्तम पद निकालना।

$(१+य)^स$ के विस्तार में नवें और $(न+१)$वें पदों पर विचार करो।

$$प_न=\frac{स(स-१)\ (स-२)\ldots\ldots(स-न+२)}{१\times२\times३\ldots\ldots\ldots(न-१)}य^{न-१}$$

$$प_{न+१}=\frac{स\ (स-१)\ (स-२)\ldots\ldots(स-न+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots\ldots न}य^न$$

$$\therefore\ \frac{प_{न+१}}{प_न}=\frac{स-न+१}{न}य$$

अतः यदि इष्ट सम्बन्ध $प_{न+१} \gtreqless प_न$ हो तो

$$\frac{प_{न+१}}{प_न}\gtreqless १ \text{ होना चाहिए।}$$

किन्तु $\frac{प_{न+१}}{प_न} = \frac{स-न+१}{न}$ य

अतः $\frac{स-न+१}{न}य \gtreqless १$ होना चाहिए।

अथवा $(स+१)य \gtreqless न(१+य)$ होना चाहिए।

इसलिए $न \lesseqgtr \frac{स+१}{१+य}$ य होना चाहिए

अतः $न \lesseqgtr \frac{स+१}{१+य}$ य तदनुसार $प_{न+१} \gtreqless प_न$ इष्ट

सम्बन्ध प्राप्त होता है।

दशा १— मान लो राशि $\frac{स+१}{१+य}$ य धन पूर्णांक त के सम है।

अतः $न \lesseqgtr त$ तदनुसार $प_{न+१} \gtreqless प_न$ होगा

(क) न को १ से (त − १) तक बढ़ाओ।
अब न की इन सब अर्हाओं के लिए न त से छोटा है।
$\therefore न = १,२,३ \quad (त-१)$ के लिए $प_{न+१} > प_न$
अतः $प_त > प_{त-१} > प_{त-२} \cdots > प_३ > प_२ > प_१$
$\therefore प_१, प_२, प_३ \cdots प_त$ में $प_त$ महत्तम पद है।

(ख) $न = त$ के लिए $प_{न+१} = प_न$

अर्थात् $प_{त+१} = प_त$

(ग) न को त+१ से स तक बढ़ाओ।

न की इन अर्हाओं के लिए $न > त$

$\therefore न = (त+१), (त+२), \ldots\ldots, स$ के लिए

$प_{न+१} < प_न$

अर्थात् $प_{त+१} > प_{त+२} > प_{त+३} \ldots\ldots > प_{स+१}$

$\therefore प_{त+१}, प_{त+२}, \ldots प_{स+१}$ में $प_{त+१}$ महत्तम पद है।

अतः यदि $\frac{स+१}{१+य}य$ धन पूर्णांक त के सम हो तो संख्या की दृष्टि से $प_त$ और $प_{त+१}$ दो महत्तम पद होते हैं तथा वे एक दूसरे के समान होते हैं।

दशा २— मान लो $\frac{(स+१)य}{१+य}$ पूर्णांक नहीं है और मान लो इसके अनुकल भाग (integral part) का अभिधान थ से किया गया है।

जैसे न का १ से थ तक वर्धन होता है न सदैव $\frac{स+१}{१+य}य$ से छोटा रहता है।

$\therefore न = १, २, \ldots\ldots, थ$ के लिए

$प_{न+१} > प_न$

अर्थात् $प_{थ+१} > प_थ > प_{थ-१} \ldots > प_३ > प_२ > प_१$

अर्थात् $प_१, प_२, \ldots\ldots प_{थ+१}$ में $प_{थ+१}$ महत्तम है।

थ के पश्चात् न की आगामी अर्हा (थ+१) है।

अब $न > थ+१$ के लिए न, $\frac{स+१}{१+य}$ य से बड़ा है।

अतः $न = थ+१, थ+२, \ldots$ स के लिए $प_{न+१} < प_न$

$\therefore \quad प_{थ+१} > प_{थ+२} > प_{थ+३} \ldots\ldots > प_{स+१}$

अतः $प_{थ+१}, प_{थ+२}, प_{थ+३}, \ldots\ldots प_{स+१}$ में स्पष्टतः $प_{थ+१}$ महत्तम है।

अतः $प_१, प_२, प_३ \ldots\ldots\ldots प_{स+१}$ में $प_{थ+१}$ महत्तम पद है।

इसलिए जब $\frac{स+१}{१+य}$ य पूर्णांक नहीं होता और उसका अनुकल भाग थ के सम होता है तब $(थ+१)^{वाँ}$ पद महत्तम होता है।

उदाहरण— $य = \frac{१}{३}$ के लिए $(१+५य)^९$ के विस्तार में महत्तम पद निकालो।

$(१+५य)^९$ के विस्तार में $न^{वाँ}$ और $(न+१)^{वाँ}$ पद यह है—

$$प_न = \frac{९ \times ८ \ldots\ldots (९-न+२)}{१ \times २ \times ३ \ldots\ldots (न-१)} (५य)^{न-१}$$

$$प_{न+१} = \frac{९ \times ८ \ldots\ldots (९-न+१)}{१ \times २ \times ३ \times \ldots\ldots \times न}(५य)^{न}$$

अब $\frac{प_{न+१}}{प_{न}} = \frac{९-न+१}{न}(५य)$

$$= \frac{१०-न}{न}५य$$

$$= \frac{१०-न}{न}\left(\frac{५}{३}\right) \qquad \left[य = \frac{१}{३} \text{ रखने से}\right.$$

अब

$\frac{१०-न}{न} \cdot \frac{५}{३} \gtreqless १$ तदनुसार $प_{न+१} \gtreqless प_{न}$ होगा।

अथवा $न \lesseqgtr ६\frac{१}{४}$ तदनुसार $प_{न+१} \gtreqless प_{न}$ होगा।

$न = १, २, ३, \ldots\ldots ६$ के लिए

$प_{न+१} > प_{न}$ क्योंकि $न < ६\frac{१}{४}$

$\therefore प_{१} < प_{२} < प_{३} \ldots\ldots < प_{६} < प_{७} \ldots\ldots\ldots (१)$

$न = ७, ८, \ldots\ldots ९$ के लिए $न > ६\frac{१}{४}$

इसलिए $प_{न+१} < प_{न}$

अतः $प_{७} > प_{८} > प_{९} > प_{१०} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$

(१) और (२) से यह स्पष्ट है कि $प_{७}$ महत्तम पद है।

अब $प_{७} = {}^{९}च_{६}(५य)^{६}$

$$= {}^{९}च_{३} \left(\frac{५}{३}\right)^{६}$$

$$= \frac{९ \times ८ \times ७}{१ \times २ \times ३} \times \frac{५^{६}}{३^{६}}$$

$$= \frac{४ \times ७}{३^{५}} \times ५^{६}$$

$$= \frac{४३७५००}{२४३}$$

११.७ $(१+य)^{न}$ के विस्तार में महत्तम गुणक निकालना।

$(१+य)^{न}$ के विस्तार में ${}^{न}च_{र}$ सामान्य पद में निहित गुणक है। अतः केवल यह निश्चय करना है कि र की किन मात्राओं के लिए ${}^{न}च_{र}$ की मात्रा महत्तम होती है। इस प्रश्न पर नवें अध्याय में पहले ही विचार किया जा चुका है।

अत यदि न युग्म हो तो महत्तम गुणक ${}^{न}च_{\frac{न}{२}}$ और यदि न अयुग्म हो तो महत्तम गुणक ${}^{न}च_{\frac{न-१}{२}}$ अथवा ${}^{न}च_{\frac{न+१}{२}}$ होता है और इस दशा में

$${}^{न}च_{\frac{न-१}{२}} = {}^{न}च_{\frac{न+१}{२}}$$

११.८ द्विपद प्रमेय की उपपत्ति— यदि स धन पूर्णांक हो तो

$$(य+क)^{स} = य^{स} + {}^{स}च_{१}कय^{स-१} + {}^{स}च_{२}क^{२}य^{स-२} + \ldots + {}^{स}च_{न}क^{न}य^{स-न} + \ldots + {}^{स}च_{स-१}क^{स-१}य + क^{स}$$

गणितीय अनुमान से इस प्रमेय की उपपत्ति यहां दी जाती है—

यदि स = १ तो

$य + क = य + क$ ....(१)

अतः द्विपद प्रमेय स=१ के लिए सत्य है।

पुनः यदि स= २

$(य+क)^{२} = (य+क)(य+क)$ [(१) के प्रयोग से

$= य^{२} + २कय + क^{२}$

$= य^{२} + {}^{२}च_{१}कय + {}^{२}च_{२}क^{२}$ ....(२)

∴ प्रमेय स = २ के लिए सत्य है।

पुनश्च यदि स = ३ तो

$(य+क)^{३} = (य+क)(य^{२} + {}^{२}च_{१}कय + {}^{२}च_{२}क^{२})$

[(२) के प्रयोग से

इसलिए प्रमेय स = ३ के लिए सत्य है।

यह ध्यान में रखना चाहिए कि प्रत्येक फल की उपपत्ति पिछले फल पर अवलंबित की गई है।

अब स की विशेष अर्हा के लिए प्रमेय की सत्यता की कल्पना करो। मान लो यह स=म के लिए सत्य है।

अतः

$$[य+क]^{म} = य^{म} + {}^{म}च_{१} कय^{म-१} + {}^{म}च\ क^{२}य^{म-२} + \ldots\ldots$$
$$+ {}^{म}च_{न-१} क^{न-१}य^{म-न+१}$$
$$+ {}^{म}च_{न} क^{न}य^{म-न} + \ldots\ldots + क^{म})$$

दोनों पक्षों का (य+क) से गुणन करने पर

वाम पक्ष $= (य+क)^{म+१}$

दक्षिण पक्ष

$$=[य+क]\,[य^{म} + {}^{म}च_{१} कय^{म-१} + {}^{म}च_{२} क^{२}य^{म-२}$$
$$+ \ldots + {}^{म}च_{न-१} क^{न-१}य^{म-न+१}$$
$$+ {}^{म}च_{न} क^{न}य^{म-न} + \ldots\ldots + क^{म}]$$
$$= य^{म+१} + {}^{म}च_{१} कय^{म} + {}^{म}च_{२} क^{२}य^{म-१} + \ldots\ldots$$
$$+ {}^{म}च_{न-१} क^{न-१}य^{म-न+२}$$
$$+ {}^{म}च_{न} क^{न}य^{म-न+१}$$
$$+ {}^{म}च_{म-१} क^{म-१}य^{२} + क^{म}\cdot य$$
$$+ कय^{म} + {}^{म}च_{१} क^{२}य^{म-१} + \ldots\ldots +$$
$$+ {}^{म}च_{न-१} क^{न}य^{म-न+१} + \ldots\ldots + {}^{म}च_{म-१} क^{म}\cdot य + क^{म+१}$$
$$= य^{म+१} + [{}^{म}च_{१} + १] कय^{म} + [{}^{म}च_{२} + {}^{म}च_{१}] क^{२}य^{म-१} + \ldots$$

११.८ द्विपद प्रमेय की उपपत्ति— यदि स धन पूर्णांक हो तो

$$(य+क)^{स} = य^{स} + {}^{स}च_{१}कय^{स-१} + {}^{स}च_{२}क^{२}य^{स-२} + \ldots + {}^{स}च_{न}क^{न}य^{स-न} + \ldots + {}^{स}च_{स-१}क^{स-१}य + क^{स}$$

गणितीय अनुमान से इस प्रमेय की उपपत्ति यहां दी जाती है—

यदि स = १ तो

$$य + क = य + क \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(१)$$

अतः द्विपद प्रमेय स = १ के लिए सत्य है।

पुनः यदि स = २

$$(य+क)^{२} = (य+क)(य+क) \quad [(१) \text{ के प्रयोग से}$$

$$= य^{२} + २कय + क^{२}$$

$$= य^{२} + {}^{२}च_{१}कय + २च_{२}क^{२} \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

∴ प्रमेय स = २ के लिए सत्य है।

पुनश्च यदि स = ३ तो

$$(य+क)^{३} = (य+क)(य^{२} + {}^{२}च_{१}कय + {}^{२}च_{२}क^{२}) \quad [(२) \text{ के प्रयोग से}$$

$$= य^{३} + २च_{१}कय^{२} + {}^{२}च_{२}क^{२}य + कय^{२} + {}^{२}च_{१}क^{२}य + {}^{२}च_{२}क^{३}$$

$$= य^{३} + ({}^{२}च_{१} + १)कय^{२} + ({}^{२}च_{२} + {}^{२}च_{१})क^{२}य + क^{३}$$

$$= य^{३} + ३कय^{२} + ३क^{२}य + क^{३}$$

$$= य^{३} + {}^{३}च_{१}कय^{२} + {}^{३}च_{२}क^{२}य + {}^{३}च_{३}क^{३}$$

इसलिए प्रमेय स = ३ के लिए सत्य है।

यह ध्यान में रखना चाहिए कि प्रत्येक फल की उपपत्ति पिछले फल पर अवलंबित की गई है।

अब स की विशेष अर्हा के लिए प्रमेय की सत्यता की कल्पना करो। मान लो यह स = म के लिए सत्य है।

अतः

$$\text{[य+क]}^{\text{म}} = \text{य}^{\text{म}} + {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{१}}\text{कय}^{\text{म}-\text{१}} + {}^{\text{म}}\text{च}\ \text{क}^{\text{२}}\text{य}^{\text{म}-\text{२}} + \ldots\ldots$$

$$+ {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{न}-\text{१}}\text{क}^{\text{न}-\text{१}}\text{य}^{\text{म}-\text{न}+\text{१}}$$

$$+ {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{न}}\text{क}^{\text{न}}\text{य}^{\text{म}-\text{न}} + \ldots\ldots + \text{क}^{\text{म}})$$

दोनों पक्षों का (य+क) से गुणन करने पर

वाम पक्ष $= (\text{य}+\text{क})^{\text{म}+\text{१}}$

दक्षिण पक्ष

$$= \text{[य+क]}\ [\text{य}^{\text{म}} + {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{१}}\text{कय}^{\text{म}-\text{१}} + {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{२}}\text{क}^{\text{२}}\text{य}^{\text{म}-\text{२}}$$

$$+ \ldots + {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{न}-\text{१}}\text{क}^{\text{न}-\text{१}}\text{य}^{\text{म}-\text{न}+\text{१}}$$

$$+ {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{न}}\text{क}^{\text{न}}\text{य}^{\text{म}-\text{न}} + \ldots\ldots + \text{क}^{\text{म}}]$$

$$= \text{य}^{\text{म}+\text{१}} + {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{१}}\text{कय}^{\text{म}} + {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{२}}\text{क}^{\text{२}}\text{य}^{\text{म}-\text{१}} + \ldots\ldots$$

$$+ {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{न}-\text{१}}\text{क}^{\text{न}-\text{१}}\text{य}^{\text{म}-\text{न}+\text{२}}$$

$$+ {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{न}}\text{क}^{\text{न}}\text{य}^{\text{म}-\text{न}+\text{१}}$$

$$+ {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{म}-\text{१}}\text{क}^{\text{म}-\text{१}}\text{य}^{\text{१}} + \text{क}^{\text{म}}\cdot\text{य}$$

$$+ \text{कय}^{\text{म}} + {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{१}}\text{क}^{\text{२}}\text{य}^{\text{म}-\text{१}} + \ldots\ldots +$$

$$+ {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{न}-\text{१}}\text{क}^{\text{न}}\text{य}^{\text{म}-\text{न}+\text{१}} + \ldots\ldots + {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{म}-\text{१}}\text{क}^{\text{म}}\cdot\text{य} + \text{क}^{\text{म}+\text{१}}$$

$$= \text{य}^{\text{म}+\text{१}} + [{}^{\text{म}}\text{च}_{\text{१}} + \text{१}]\text{कय}^{\text{म}} + [{}^{\text{म}}\text{च}_{\text{२}} + {}^{\text{म}}\text{च}_{\text{१}}]\text{क}^{\text{२}}\text{य}^{\text{म}-\text{१}} + \ldots$$

$$+\left[{}^{म}च_{न} + {}^{म}च_{न-१}\right]क^{न}य^{म-न+१} + \ldots\ldots + क^{म+१}$$

किन्तु ${}^{म}च_{न} + {}^{म}च_{न-१} = {}^{म+१}च_{न}$

$$\therefore \text{दक्षिण पक्ष} = य^{म+१} + {}^{म+१}च_{१}कय^{म} + {}^{म+१}च_{२}क^{२}य^{म-१} + \ldots + {}^{म+१}च_{न}क^{न}य^{म-न+१} + \ldots + {}^{म+१}च_{म}क^{म}य + क^{म+१}$$

किन्तु यह स = म + १ के लिये द्विपद विस्तार है।

अतः यदि यह कल्पना कि द्विपद प्रमेय स की किसी विशेष अर्हा म के लिए सत्य हो तो प्रमेय स की आगामी उच्चतर अर्हा अर्थात् स = म + १ के लिए भी सत्य होगा।

यह देखा जा चुका है कि स = १ अतएव स = २, ३ के लिए द्विपद प्रमेय सत्य है। प्रमेय स = ३ के लिए सत्य है इसलिए, स की आगामी उच्चतर अर्हा अर्थात् स = ४ के लिए भी सत्य है। स की आगामी उच्चतर अर्हा अर्थात् स = ५ के लिए भी सत्य है।

इस विधा के लगातार प्रयोग से अन्ततः यह दिखाया जा सकता है कि स की सब धन पूर्णांक अर्हाओं के लिए यह प्रमेय सत्य है।

११.९ द्विपद गुणक (binomial coefficients) $(१+य)^{स}$ के विस्तार में अर्थात्

$$१ + {}^{स}च_{१}य + {}^{स}च_{२}य^{२} + \ldots\ldots + {}^{स}च_{न}य^{न} + \ldots\ldots {}^{स}च_{स}य^{स}$$

में ${}^{स}च_{१}$, ${}^{स}च_{२}$, ${}^{स}च_{३}$......${}^{स}च_{न}$ द्विपद गुणक कहलाते

हैं। निम्न-लिखित प्रश्नों में $च_न$, $^सच_न$ का अभिधान करेगा।

उपर्युक्त विस्तार में य को विभिन्न अर्हाएं देने से अनेक ऐकात्म्य प्राप्त किए जा सकते हैं।

(१) गुणकों का योग— यह ज्ञात है कि

$(१+य)^स$

$$=च_० + च_१ य + च_२ य^२ + \dots + च_न य^न + \dots + च_स य^स$$

[$च_० = १$, तथा $च_स = १$

इस सम्बन्ध में य = १ रखो।

$$\therefore २^स = च_० + च_१ + च_२ + \dots + च_न + \dots + च_स$$

= गुणकों का योग।

$$अतः\ च_१ + च_२ + च_३ + \dots + च_स = २^स - १$$

(२) $(१+य)^स$ के विस्तार में अयुग्म पदों में निहित गुणकों का योग युग्म पदों में निहित गुणकों के योग के सम होता है।

$$(१+य)^स = च_० + च_१ य + च_२ य^२ + \dots + च^स य^स$$

इस सम्बन्ध में य = −१ रखो।

$$\therefore\ ० = च_० - च_१ + च_२ - च_३ + \dots\dots + च_स (-१)^स$$

$$\therefore\ च_० + च_२ + च_४ \dots\dots = च_१ + च_३ + च_५ + \dots\dots$$

उपप्रमेय— $च_० + च_२ + च_४ + \dots = च_१ + च_३ + च_५ + \dots = २^{स-१}$

यह ज्ञात है कि

$$च_० + च_२ + च_४ \dots = च_१ + च_३ + च_५ + \dots\dots$$

$$= \frac{१}{२}\ [सब\ गुणकों\ का\ योग]$$

$$= \frac{१}{२}\ २^{स}$$

$$= २^{स-१}$$

१४.९१ ये साधित प्रश्न बोधात्मक हैं—

उदाहरण १— दिखाओ कि

$$च_१ + २च_२ + ३च_३ + \ldots\ldots + न\ च_न + \ldots\ldots\ldots + सच_स = स \times २^{स-१}$$

यह ज्ञात है कि

$$च_१ + २च_२ + ३च_३ + \ldots\ldots\ldots + नच_न + \ldots\ldots सच_स$$

$$= \left[स + \frac{२स\,(स-१)}{१ \times २} + ३\frac{स(स-१)(स-२)}{१ \times २ \times ३} \ldots\ldots + \frac{न\,\lfloor स}{\lfloor न\,\lfloor स-न} + \ldots\ldots + स \right]$$

$$= स\left[१ + (स-१) + \frac{(स-१)\,(स-२)}{१ \times २} + \ldots\ldots + \frac{\lfloor स-१}{\lfloor न-१\,\lfloor स-१-(न-१)} + \ldots + १ \right]$$

$$= स\left[{}^{स-१}च_० + {}^{स-१}च_१ + {}^{स-१}च_२ + \ldots + {}^{स-१}च_{न-१} + \ldots\ldots + {}^{स-१}च_{स-१} \right]$$

$$= स \times २^{स-१}$$

उदाहरण २— दिखाओ कि

$$^{स}च_{०} - \frac{१}{२}\, ^{स}च_{१} + \frac{१}{३}\, ^{स}च_{२} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(-)^{स}\, ^{स}च_{स}}{स+१} = \frac{१}{स+१}$$

यह ज्ञात है कि

$$^{स}च_{०} - \frac{१}{२}\, ^{स}च_{१} + \frac{१}{३}\, ^{स}च_{२} + \ldots\ldots + (-)^{स} \frac{१}{स+१} \times {}^{स}च_{स}$$

$$= १ - \frac{स}{२} + \frac{स(स-१)}{१\times२\times३} + \ldots\ldots + (-)^{स}\ \frac{१}{स+१}$$

$$= \frac{१}{स+१}\Big[(स+१) - \frac{(स+१)स}{१\times२}$$

$$+ \frac{(स+१)स(स-१)}{१\times२\times३} + \ldots\ldots + (-)^{स}\Big]$$

$$= \frac{१}{स+१}\Big[{}^{स+१}च_{१} - {}^{स+१}च_{२} + {}^{स+१}च_{३}$$

$$+ \ldots\ldots + (-)^{स}\ च_{स+१}\Big]$$

$$= \frac{१}{स+१} - \frac{१}{स+१}\Big[१ - {}^{स+१}च_{१} + {}^{स+१}च_{२} - {}^{स+१}च_{३}$$

$$+ \ldots\ldots + (-)^{स+१}\ {}^{स+१}च_{स+१}\Big]$$

$$=\frac{१}{स+१}-\frac{१}{स+१}\Big[१-१\Big]^{स+१}$$

$$=\frac{१}{स+१}$$

उदाहरण ३— यदि $च_०$, $च_१$, $च_२$ ... $च_स$ य $(१+य)^स$ के विस्तार में गुणकों का अभिधान करते हों तो सिद्ध करो कि

$$३च_० + ३^२ \frac{च_१}{२} + ३^३ \frac{च_२}{३} + \quad + \frac{३^{स+१} च_स}{स+१}$$

$$= \frac{४^{स+१}-१}{स+१}$$

अब

$$३च_० + ३^२ \frac{च_१}{२} + ३^३ \frac{च_२}{३} + \quad + \frac{३^{स+१} च_स}{स+१}$$

$$= \frac{१}{स+१}\Big[३(स+१)च_० + ३^२(स+१)\frac{च_१}{२} + \frac{३^३(स+१)च_२}{३} + \quad + ३^{स+१}च_स\Big]$$

$$= \frac{१}{स+१}\Big[\Big\{१+३(स+१)+\frac{३^२(स+१)स}{१\times२} + ३^३\frac{(स+१)(स)(स-१)}{१\times२\times३} + \quad + ३^{स+१}\Big\}-१\Big]$$

$$= \frac{१}{स+१}\left[{}^{स+१}च_० + {}^{स+१}च_१ ३ + {}^{स+१}च_२ ३^२ + {}^{स+१}च_३ ३^३ + \ldots\ldots + {}^{स+१}च_{स+१} ३^{स+१} - १\right]$$

$$= \frac{१}{स+१}\left[(१+३)^{स+१} - १\right]$$

$$= \frac{४^{स+१} - १}{स+१}$$

उदाहरण ४— यदि $च_०, च_१, च_२, \ldots\ldots च_स$

ये $(१+य)^स$ के विस्तार में गुणकों का अभिधान करते हों तो सिद्ध करो कि

$$च_० च_१ + च_१ च_२ + च_२ च_३ + \ldots\ldots + च_{स-१} च_स = \frac{|२स}{|स-१ \; |स+१}$$

यह ज्ञात है कि

$$(१+य)^स = च_० + च_१ य + च_२ य^२ + च_३ य^३ + \ldots\ldots + च_त य^त + \ldots\ldots + च_स य^स \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\left(१+\frac{१}{य}\right)^स = च_० + \frac{च_१}{य} + \frac{च_२}{य^२} + \frac{च_३}{य^३} + \ldots + \frac{च_त}{य^त} + \ldots \ldots\ldots + \frac{च_स}{य^स} \quad \ldots\ldots\ldots (२)$$

(१) और (२) का गुणन करो।

$$\therefore \frac{(१+य)^{२स}}{य^{स}}$$

$$=\left[च_{०}+च_{१}य+च_{२}य^{२}+\ldots+च_{न}य^{न}+\ldots+च_{स}य^{स}\right]$$

$$\times\left[च_{०}+\frac{च_{१}}{य}+\frac{च_{२}}{य^{२}}+\ldots+\frac{च_{न}}{य^{न}}+\ldots+\frac{च_{स}}{य^{स}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(३)$$

$$अब \ \frac{(१+य)^{२स}}{य^{स}}$$

$$=\frac{१}{य^{स}}\left[{}^{२स}च_{०}+{}^{२स}च_{१}य+{}^{२स}च_{२}य^{२}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+{}^{२स}च_{स-१}य^{स-१}+{}^{२स}च_{स}य^{स}+\ldots\ldots+{}^{२स}च_{२स}य^{२स}\right]$$

इस विस्तार में $\frac{१}{य^{स}}, \frac{१}{य^{स+१}} \ldots\ldots \frac{१}{य}, य, य^{२} \ldots य^{स-१}, य^{स}$ इनको धारण करने वाले पद प्राप्त होंगे।

(३) में वाम पक्ष, दक्षिण पक्ष के सर्वांग सम है। अपेक्षित योग, (३) में दक्षिण पक्ष के गुणनफल में $\frac{१}{य}$ अथवा य का गुणक है। इसका, वाम पक्ष के $\frac{१}{य}$ अथवा य के गुणक से समीकरण करने पर

$च_{०}च_{१}+च_{१}च_{२}+\ldots\ldots={}^{२स}च_{स-१}$ प्राप्त होता है।

(२) $\left(१-\frac{य}{२}\right)^{१४}$ जब $य=\frac{३}{२}$

(३) $(१+२य)^{१०}$ जब $य=\frac{३}{७}$

(४) $\left(२-\frac{य}{५}\right)^{१७}$ जब $य=\frac{४}{५}$

निम्न-लिखित प्रश्नों में $च_०, च_१ \ldots च_स$ ये $(१+य)^स$ के विस्तार में द्विपद गुणकों का अभिधान करते हैं।

(७) $च_० + २च_१ + ३च_२ + \ldots + (स+१)च_स$ की अर्हा निकालो।

सिद्ध करो कि

(८) $\frac{च_१}{च_०} + \frac{२च_२}{च_१} + \frac{३च_३}{च_२} + \ldots + \frac{सच_स}{च_{स-१}} = \frac{स(स+१)}{२}$

(९) $(च_० + च_१)(च_१ + च_२) \ldots (च_{स-१} + च_स)$

$$= \frac{च_० च_१ च_२ \ldots च_स (स+१)^स}{\lfloor स}$$

(१०) $च_० च_२ + च_१ च_३ + \ldots + च_{स-२} च_स$

$$= \frac{\lfloor २स}{\lfloor स-२ \; \lfloor स+२}$$

(११) $च_0 च_न + च_1 च_{न+1} + \dots + च_{स-न} च_स$

$$= \frac{\lfloor २स}{\lfloor स-न \lfloor स+न}$$

(१२) स की युग्म अथवा अयुग्म अहानुसार
$च_0^2 - च_1^2 + च_2^2 - च_3^2 + \dots + (-)^स च_स^2$ की

अर्हा शून्य अथवा $\dfrac{(-१)\ \lfloor स}{(\lfloor स)^2}$ होगी।

(१३) $च_0 + \frac{च_1}{२} + \frac{च_2}{३} + \dots + \frac{च_स}{स+१} = \frac{२^{स+१} - १}{स+१}$

(१४) $२च_0 + ५च_1 + ८च_2 + \dots + (३स+२)च_स$
$= (३स+४)२^{स-१}$

(१५) $(१+य)^{म+स} = (१+य)^म (१+य)^स$ इस ऐकात्म्य का प्रयोग कर के, सिद्ध करो कि

$$^{म+स}च_न = {}^मच_न + {}^मच_{न-1}\,{}^सच_1 + \dots\dots\dots\dots + {}^मच_{न-2}\,{}^सच_2 + \dots\dots + {}^सच_न$$

बारहवां अध्याय

द्विपद प्रमेय

कोई भी घात

१२.१ यह पहले ही बताया जा चुका है कि यदि स धन पूर्णांक हो तो

$$(१+य)^{स} = १ + {}^{स}च_{१}य + {}^{स}च_{२}य^{२} + \ldots\ldots + {}^{स}च_{न}य^{न} + \ldots\ldots + य^{स}$$

अथवा
$$= १ + स\,य + \frac{स(स-१)}{१\times२}य^{२} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{|\underline{स}}{|\underline{न}\;\;|\underline{स-न}}य^{न} + \ldots + य^{स}$$

यह ध्यान में रखना आवश्यक है कि उक्त विस्तार में (१) पदों की संख्या परिमित है और (स+१) के सम है (२) यह विस्तार य की सब महाओं के लिए सत्य है।

अतः $१ + सय + \frac{स(स-१)}{१\times२}य^{२} + \ldots\ldots + य^{स}$ इस

सान्त श्रेढी को लिखने का $(१+य)^{स}$ संक्षिप्त रूप है। इसमें यह अर्थ निहित है कि $(१+य)^{स}$ और

$$१+सय+\frac{स(स-१)}{१\times२}य^{२}+\ldots\ldots\ldots\ldots+य^{स}$$ ये दो

पदसंहतियां परस्पर समार्ह (equivalent to one another) हैं। किसी भी घात के लिए द्विपद विस्तरण की रीति बतलाने के पहले उपर्युक्त समार्हता का ध्यान रखते हुए इन साधित प्रश्नों का अध्ययन करना ठीक होगा।

१२.२ $१+४य+८य^{२}+८य^{३}$ का $१+२य$ से भाजन करने पर लब्धि को य के आरोही घातों में व्यक्त करो। साधारण भाजन क्रिया से यह फल प्राप्त होता है।

$$
\begin{array}{l|l|l}
१+२य & १+४य+८य^{२}+८य^{३} & १+२य+४य^{२} \\
 & १+२य & \\
 & -\quad - & \\
\hline
 & \quad २य+८य^{२} & \\
 & \quad +२य+४य^{२} & \\
 & \quad -\quad - & \\
\hline
 & \qquad ४य^{२}+८य^{३} & \\
 & \qquad ४य^{२}+८य^{३} & \\
 & \qquad -\quad - & \\
\hline
 & \qquad \times\quad \times &
\end{array}
$$

इस क्रिया में शेष न रहने के कारण भाजन विधा का अवसान होता है।

अतः $\frac{१+४य+८य^{२}+८य^{३}}{१+२य}=१+२य+४य^{२}$

वाम पक्ष का प्रतिनिधान दक्षिण पक्ष की पदसंहति करती है।

अब यदि १ का (१ − य) से भाजन किया जाय तो लब्धि य के आरोही घातों श्रेढ़ी के रूप में प्राप्त होगी और भाजन विधा का कभी अवसान न होगा।

लब्धि का $१+य+य^{२}+$......यावदनन्ति, रूप होगा।

अब दोनों दशाओं में भाजन विधा का आश्रय लिया गया है। पहली दशा में य की किसी भी अर्हा के लिए सम्पूर्ण लब्धि प्राप्त होती है और वह इस प्रकार लिखी जा सकती है।

$\frac{१+४य+८य^{२}+८य^{३}}{१+२य}=१+२य+४य^{२}$ और यह य की सब अर्हाओं के लिए सत्य है।

अथवा दक्षिण पक्ष य की सब अर्हाओं के लिए वाम पक्ष का प्रतिनिधान करता है।

दूसरी दशा में भाजन विधा अपूर्ण रहती है और भजन-फल में अनन्त श्रेढ़ी प्राप्त होती है। अब प्रश्न यह है की इस फल का निर्वचन किस प्रकार किया जाय? क्या $\frac{१}{१-य}$, य की सब अर्हाओं के लिए $१+य+य^{२}+$......का प्रतिनिधान कर सकता है?

इसका निश्चय करने के लिए इस रीति का अनुसरण किया जायगा।

य=३ लेने से

$$\frac{१}{१-य} = \frac{१}{१-३} = -\frac{१}{२}$$

और $१+य+य^२+\ldots$ यावदनन्ति (up to infinity)

$=१+३+३^२+\ldots\ldots$ यावदनन्ति।

अतः $-\frac{१}{२}$ को $(१+३+३^२+\ldots\ldots$ यावदनन्ति$)$ का प्रतिनिधान करना होगा अर्थात् ऋण राशि घन राशियों के योग का प्रतिनिधान करेगी। किन्तु यह असंगत है। अतः $\frac{१}{१-य}$ व्यंजक $(१+य+य^२+\ldots\ )$ का प्रतिनिधान, य की किसी भी और प्रत्येक अर्हा के लिए नहीं कर सकता।

इसके लिए श्रेढ़ियों के अभिसार और अपसार (convergence and divergence) का पर्यालोचन आवश्यक हो जाता है। किन्तु यह विषय इस पुस्तक के क्षेत्र के बाहर है। इस कारण अनुसंधान की रीति का निर्देश यहां स्थूल रूप से किया जायगा।

इस अनन्त श्रेढ़ी के स पदों का योग लेकर स के अति महान् होने पर इस योग के आचरण का अवलोकन करो।

अब $१+य+य^२+\ldots\ldots+य^{स-१}$ इस श्रेढ़ी के स

पदों का योग $\frac{१-य^स}{१-य}$ है। अतः स पदों के योग का अभिधान

यो$_स$ से करने पर

$$यो_स = \frac{१-य^स}{१-य}$$

$$= \frac{१}{१-य} - \frac{य^स}{१-य}$$

(अ) मान लो य की अर्हाएं -१ और $+१$ के बीच में हैं।

अर्थात् मान लो $-१ < य < १$

य की अर्हाओं पर उपर्युक्त निर्बंध होने से जैसे जैसे स की महान् से महत्तर अर्हाएं ली जायंगी वैसे वैसे $य^स$ की अर्हाएं न्यून से न्यूनतर होती जायंगी।

अतः यदि $-१ < य < १$ और $स \rightarrow \infty$ हो तो

$$\frac{य^स}{१-य} \rightarrow ०$$

इसलिए $\frac{१}{१-य} - \frac{य^स}{१-य}$ सीमान्ती (in the limit) $\frac{१}{१-य}$ की अर्हा के निकट आता है।

इससे य की $-१ < य < १$ अर्हाओं के लिए $१+य+य^२+य^३+\ldots$. इस श्रेढी के स पदों का योग स के अनियत वर्धन करने पर लगभग $\frac{१}{१-य}$ के सम होता है।

य की अर्हा पर इस निर्बंध को रख कर $\frac{१}{१-य}$ को अनन्त श्रेढी का समाहर्र लिया जा सकता है। इस दशा में यह कहा जायगा कि $१+य+य^२+......$ यह अनन्त श्रेढी का $-१<य<१$ के लिए, $\frac{१}{१-य}$ अर्हा पर अभिसरण होता है।

(आ) मान लो $य>१$ अथवा <-१ उदाहरणार्थ $य=३$ अथवा $य=-८$

$$१+य+य^२+..+य^{स-१}=\frac{१}{१-य}-\frac{य^स}{१-य}$$

$य^स$ की संख्यात्मक अर्हा स की अर्हा बढ़ने के साथ साथ बढती है। अतः $\frac{य^स}{१-य}$ की संख्यात्मक अर्हा भी स के बढ़ने के साथ साथ बढ़ती है। स को जितना ही बढ़ाया जाय उतना ही $१+य+य^२+...य^{स-१}$ की अर्थात् $\frac{१}{१-य}-\frac{य^स}{१-य}$ की अर्हा और $\frac{१}{१-य}$ म का अन्तर बढ़ता ही जाता है। अतः जैसे $स\to\infty$ $१+य+य^२+...$ इस श्रेढी के प्रथम स पदों का योग $\frac{१}{१-य}$ की अर्हा के निकट नहीं आता।

अतः $१+य+य^२+.....$ इस श्रेढी का प्रतिनिधान करने के लिए $\frac{१}{१-य}$ का प्रयोग नहीं किया जा सकता।

अर्थात् यह नहीं कहा जा सकता कि संख्या की दृष्टि से

य $>$ १ के लिए $\frac{१}{१-य} = १+य+य^२+\dots\dots$

इस प्रकार की श्रेढियां अपसारी (divergent) श्रेढियां कहलाती हैं।

१२.२१ गत अनुच्छेद के पर्यालोचन से ये फल प्राप्त होते हैं।

यदि $-१<य<१$ हो तो जैसे $स \to \infty$

$१+य+य^२+\dots+य^{स-१}$ श्रेढी के स पदों का योग $\frac{१}{१-य}$

की अर्हा के निकट आता है। और सीमान्ती

$\frac{१}{१-य} = १+य+य^२+\dots$ यावदनन्ति लिख सकते हैं।

यदि संख्यात्मक दृष्टि से य$>$१ हो तो

$\frac{१}{१-य} = १+य+य^२+\dots$ यावदनन्ति लिखना असंगत होगा।

१२.३ अनन्त श्रेढी के अन्य उदाहरण—

अब $(१+य)^{\frac{३}{२}}$ की अर्हा मूलक्रिया से निकालो।

$$(१+य)^{\frac{३}{२}} = [(१+य)^३]^{\frac{१}{२}}$$

$$= [१+३य+३य^२+य^३]^{\frac{१}{२}}$$

१	$१+३य+३य^२+य^३$	$१+\frac{३}{२}य+\frac{३}{८}य^२-\frac{१}{१६}य^३$
१	१	
$२+\frac{३}{२}य$	$३य+३य^२$	
$\frac{३}{२}य$	$३य+\frac{९}{४}य^२$	
	$-\quad -$	
$२+३य+\frac{३}{८}य^२$	$\frac{३}{४}य^२+य^३$	
$\frac{३}{८}य^२$	$\frac{३}{४}य^२+\frac{९}{८}य^३+\frac{९}{६४}य^४$	
	$-\quad -\quad -$	
$२+३य+\frac{३}{४}य^२-\frac{१}{१६}य^३$	$-\frac{य^३}{८}-\frac{९}{६४}य^४$	
	$-\frac{य^३}{८}-\frac{३य^४}{१६}-\frac{३य^५}{६४}+\frac{य^६}{२५६}$	
	$+\quad +\quad +\quad -$	
	$\frac{३}{६४}य^४+\frac{३य^५}{६४}-\frac{य^६}{२५६}$	

अर्थात्

$$(१+य)^{\frac{3}{2}} = १ + \frac{3}{2}य + \frac{3}{8}य^२ - \frac{१}{१६}य^३ + \ldots\ldots$$

यह प्राप्त होता है। इस विधा का अवसान नहीं होता और दक्षिण पक्ष में पदों की पूर्वानुपरता रहती है। य की दत्त अर्हा के लिए, यदि दक्षिण पक्ष की श्रेढी से $(१+य)^{\frac{3}{2}}$ की लगभग शुद्ध अर्हा प्राप्त करनी हो तो बहुत से पद लेने होंगे। गुणकों की रचना पर लागू होने वाले नियम श्रेढी प्राप्त करने की इस रीति में सरलता से ज्ञात नहीं हो सकते।

१२.४ गत अनुच्छेद के अनुसार $(१+य)^{\frac{3}{2}}$ का प्रतिनिधान, य की कुछ अर्हाओं के लिए अनन्त श्रेढी से हो सकता है।

अब प्रश्न यह है कि स के धन पूर्णांक न होने पर य की नियद्ध (restricted) अर्हाओं के लिए भी $(१+य)^स$ के द्विघात-विस्तार का समाई रूप किस प्रकार लिखा जाय ?

इस प्रयोजन से वर्गमूल और भाजन क्रिया से क्रमशः $(१+य)^{\frac{१}{२}}$ और $(१+य)^{-१}$ के लिए प्राप्त पदों की तुलना, $(१+य)^स$ के

$$१+सय+\frac{स(स-१)}{१\times२}य^२+\frac{स(स-१)(स-२)}{१\times२\times३}य^३\ldots\ldots(१)$$

इस रूप के विस्तार के पदों से जो स की धन पूर्णांक अर्हाओं के लिए सत्य है, करनी चाहिए। यह ज्ञात है कि

$$\frac{१}{१-य} = १ + य + य^२ + य^३ + \ldots\ldots\ldots\ldots (-१ < य < १)$$

इसे $१ + (-१)(-य) + \frac{(-१)(-२)}{१ \times २} \times (-य)^२$

$$+ \frac{(-१)(-२)(-३)}{१ \times २ \times ३}(-य)^३ + \ldots\ldots\ldots \qquad (२)$$

इस प्रकार लिख सकते हैं।

और $(१ + य)^{\frac{३}{२}} = १ + \frac{३}{२} य + \frac{३}{८} य^२ - \frac{१}{१६} य^३ \ldots\ldots$

$$= १ + \frac{३}{२} य + \frac{\frac{३}{२}(\frac{३}{२} - १)}{१ \times २} य^२$$

$$+ \frac{\frac{३}{२}(\frac{३}{२} - १)(\frac{३}{२} - २)}{१ \times २ \times ३} य^३ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

इस प्रकार लिख सकते हैं।

अब (१) में स = −१ रखने से और य का −य में परिवर्तन करने से

$$१ + (-१)(-य) + \frac{(-१)(-२)}{१ \times २}(-य)^२$$

$$+ \frac{(-१)(-२)(-३)}{१ \times २ \times ३}(-य)^३ + \ldots\ldots\ldots (४)$$

प्राप्त होता है।

और (१) में $स = \frac{३}{२}$ रखने से

$$१ + \frac{३}{२} य + \frac{\frac{३}{२}(\frac{३}{२} - १)}{१ \times २} य^{२} + \frac{\frac{३}{२}(\frac{३}{२} - १)(\frac{३}{२} - २)}{१ \times २ \times ३} य^{३} + \ldots\ldots\ldots\ldots (५)$$

प्राप्त होता है,

(२) और (३) के पदों की तुलना क्रमशः (४) और (५) के पदों के साथ करने से, यह ज्ञात होता है कि (२) और (३) के विभिन्न पद क्रमशः $(१ + य)^{स}$ के विस्तार से इन साधारण आदेशों से प्राप्त है,

(क) $स = -१$ और य का $-य$ में परिवर्तन

(ख) $स = \frac{३}{२}$

भाजन और वर्गमूल निकालने की क्रियाओं से अथवा $(१ + य)^{स}$ के विस्तार में यथेष्ट आदेश करने से एकसे फल प्राप्त होते हैं। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि स की ऋण और भिन्न अर्हाओं के लिये, जब य की अर्हा पर विशेष निर्बंध हो तो $(१ + य)^{स}$ का विस्तार

$$१ + सय + \frac{स(स - १)}{१ \times २} य + \frac{स(स - १)(स - २)}{१ \times २ \times ३} य + \ldots\ldots$$

इस रूप में संभव है।

अब प्रमेय को अन्तिम रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं

$(१+य)^{स} = १ + स\,य + \frac{स\,(स-१)}{१\times २}य^{२}$

$$+ \frac{स\,(स-१)\,(स-२)}{१\times २\times ३}य^{३} + \ldots\ldots$$ यह विस्तार

(क) स के धन पूर्णांक रहने पर य की सब अर्हाओं के लिए और

(ख) यदि $-१ < य < १$ हो तो स की सब अर्हाओं के लिए सत्य है।

स की किसी भी अर्हा के लिए, इस प्रमेय का उपपादन, इस पुस्तक के क्षेत्र के बाहर है।

१२.४१ कुछ साधित प्रश्न—

उदाहरण १— $(१-य)^{\frac{४}{३}}$ का ४ पदों तक विस्तार करो।

$$(१-य)^{\frac{४}{३}} = १ + \frac{४}{३}(-य) + \frac{\frac{४}{३}(\frac{४}{३}-१)}{१\times २}(-य)^{२}$$

$$+ \frac{\frac{४}{३}(\frac{४}{३}-१)(\frac{४}{३}-२)}{१\times २\times ३}(-य)^{३} + \ldots$$

$$= १ - \frac{४}{३}य + \frac{२}{९}य^{२} + \frac{४}{८१}य^{३}\ldots\ldots\ldots$$

उदाहरण २— $(३+४य)^{-५}$ का ४ पदों तक विस्तार करो।

$$(३+४य)^{-५} = ३^{-५}\left[१ + \frac{४}{३}य\right]^{-५}$$

$$=\frac{१}{३^५}\left[१+(-५)\left(\frac{४}{३}य\right)+\frac{(-५)(-५-१)}{१\times२}\left(\frac{४}{३}य\right)^२ + \frac{(-५)(-५-१)(-५-२)}{१\times२\times३}\left(\frac{४}{३}य\right)^३+\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{१}{३^५}\left[१-\frac{२०}{३}य+\frac{८०}{३}य^२-\frac{२२४०}{२७}य^३+\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{१}{२४३}-\frac{२०}{७२९}य+\frac{८०}{७२९}य^२-\frac{२२४०}{६५६१}य^३+\ldots\ldots$$

१२.५ $(१+य)^स$ के विस्तार में सामान्य पद—

$$\text{अब } (१+य)^स=१+सय+\frac{स(स-१)}{१\times२}य^२ + \frac{स(स-१)(स-२)}{१\times२\times३}य^३+\ldots\ldots$$

यदि $प_{न+१}$ से सामान्य पद का अभिधान किया जाय तो सामान्य पद $=(न+१)^{वां}$ पद $=प_{न+१}$

$$=\frac{स(स-१)(स-२)\ldots\ldots(स-न+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots न}य^न$$

सामान्य पद में निहित गुणक के अंश में का कोई खण्ड शून्य के सम हुए बिना वह गुणक कभी शून्य के सम न होगा। क्योंकि न धन पूर्णांक है इसलिए स के धन पूर्णांक हुए बिना अंश का कोई खण्ड शून्य नहीं हो सकता। अतः यदि स धन पूर्णांक न हो तो $(१+य)^स$ के विस्तार में पदों की संख्या अनन्त होगी।

१२.५१ कुछ साधित प्रश्न—

उदाहरण १— $(१-य)^{-\frac{१}{२}}$ के विस्तार में सामान्य पद निकालो।

$(न+१)$वां पद

$$=\frac{(-\frac{१}{२})(-\frac{१}{२}-१)(-\frac{१}{२}-२)\ldots\ldots(-\frac{१}{२}-न+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots न}(-य)^{न}$$

$$=\frac{(-१)(-३)(-५)(-७)\ldots\ldots(-२न+१)}{२^{न}\times१\times२\times३\ldots\ldots न}(-य)^{न}$$

अंश में खण्डों की संख्या न है और वे सब ऋण हैं।

अतः $(न+१)$वां पद

$$=(-१)^{२न}\times\frac{१\times३\times५\ldots\ldots(२न-१)}{२^{न}१\times२\times३\ldots\ldots न}य^{न}$$

$$=\frac{१\times३\times५\ldots\ldots(२न-१)}{२^{न}\ न}य^{न}$$

उदाहरण २— $(१-य)^{-२}$ के विस्तार में सामान्य पद निकालो।

$(न+१)$वां पद

$$=\frac{(-२)(-३)(-४)\ldots\ldots(-२-न+१)}{१\times२\times३\ldots न}(-य)^{न}$$

$$=\frac{२\times३\times४\ldots\ldots न\ (न+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots न}य^{न}$$

$= (न+१)य^न$ [अंश और हर के उभय साधारण खण्डों का लोप करने से]

१२.५२ $(१-य)^{-स}$ के विस्तार में साधारण पद को सरल रूप में निकालना—

$(न+१)^{वां}$ पद

$$= \frac{(-स)(-स-१)(-स-२)\ldots(-स-न+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots\ldotsन}(-य)^न$$

$$= (-१)^न \frac{(स)(स+१)(स+२)\ldots\ (स+न-१)}{१\times२\times३\ldots\ldots\ldotsन}(-य)^न$$

$$= (-१)^{२न} \frac{स\ (स+१)\ (स+२)\ldots\ldots\ (स+न-१)}{\lfloor न}\ य^न$$

$$= \frac{स\ (स+१)\ (स+२)\ldots\ldots\ldots\ (स+न-१)}{\lfloor न} य^न$$

इससे यह ज्ञात होता है कि $(१-य)^{-स}$ के विस्तार में प्रत्येक पद घन है।

स को १, २, ३........ अर्घाएं देने पर

$(१-य)^{-१} = १+य+य^२+य^३\ldots\ldots+य^न+\ldots\ldots$

$(१-य)^{-२} = १+२य+३य^२+४य^३+\ldots\ldots$
$\ldots\ldots+(न+१)य^न+\ldots\ldots$

$$(१-य)^{-३} = १ + ३य + ६य^२ + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{(न+१)\,(न+२)}{१\times२}य^न + \ldots\ldots$$

प्राप्त होते हैं।

उदाहरण १— $\dfrac{१}{\sqrt[५]{१-५य}}$ के विस्तार में सामान्य पद निकालो।

अब $\dfrac{१}{\sqrt[५]{१-५य}} = (१-५य)^{-\frac{१}{५}}$

$(न+१)$वाँ पद

$$= \frac{\frac{१}{५}\left(\frac{१}{५}+१\right)\left(\frac{१}{५}+२\right)\ldots\ldots\left(\frac{१}{५}+न-१\right)}{१\times२\times३\ldots\ldots न}(५य)^न$$

$$= \frac{१\times६\times११\ldots\ldots(५न-४)}{५^न\ \underline{|न}}\ ५^न\ य^न$$

$$= \frac{१\times६\times११\ldots\ldots(५न-४)}{\underline{|न}}य^न$$

१२.६ $(१+य)^न$ के विस्तार में पदों के चिह्न—

अब $(१+य)^न = १ + नय + \dfrac{न(न-१)}{१\times२}य^२$
$$+ \frac{न\,(न-१)\,(न-२)}{१\times२\times३}य^३ + \ldots\ldots$$

इस विस्तार में

$$प_{न+१} = \frac{स (स-१) (स-२) \ldots\ldots (स-न+१)}{१ \times २ \times ३ \ldots\ldots न} य^{न}$$

$$प^{न} = \frac{स (स-१) (स-२) \ldots\ldots (स-न+२)}{१ \times २ \times ३ \ldots\ldots (न-१)} य^{न-१}$$

$$\therefore \frac{प^{न+१}}{प^{न}} = \frac{स-न+१}{न} य$$

अतः $(१+य)^{स}$ के विस्तार में $(न+१)^{वां}$ पद $न^{वें}$ पद का $\frac{स-न+१}{न}$ य से अर्थात् $\left(\frac{स+१}{न}-१\right)$य से गुणन करने पर प्राप्त होता है।

अब यदि (स+१) ऋण हो तो $\left(\frac{स+१}{न}-१\right)$ सदैव ऋण रहेगा।

पुनः (स+१) की अर्हा चाहे जो भी हो $\left(\frac{स+१}{न}-१\right)$ यह उस पद के पश्चात् जिसके लिए न > स+१ है सब पदों के लिए ऋण रहेगा।

अतः यदि य धन हो तो जब तक न > स+१ है ; (न+१)वें और नवें पदों की निष्पत्ति ऋण रहेगी। इसलिए $(१+य)^{स}$ के विस्तार के पद न पदों के पश्चात्, जिनमें न, (स+१) से बड़ा प्रथम धन पूर्णांक है एकान्तर से (alternately) धन और ऋण रहेंगे।

यदि य ऋण हो तो जब तक न > स + १ होगा, (न + १)वें और नवें पदों की निष्पत्ति सदैव धन रहेगी।

अतः य ऋण और न, स + १ से बड़ा पहला धन पूर्णांक हो तो $(१+य)^स$ के विस्तार में नवें पद के पश्चात् सब पदों के चिह्न नवें पद के चिह्न के समान होंगे। विशेष उदाहरण के लिए $(१-य)^स$ के विस्तार के सब पद, स के ऋण होने पर, धन होते हैं

१२.७ य की परिमेय अर्हा के लिए $(१+य)^स$ के विस्तार में संख्या की दृष्टि से महत्तम पद निकालना।

क्योंकि महत्तम पद की केवल संख्यात्मक अर्हा निकालनी है, इसलिए य को सर्वत्र धन माना जायगा।

य की सब अर्हाओं के लिए, ऐसी दशा का, जिस में स धन पूर्णांक है, पर्यालोचन किया जा चुका है।

यह देखा जा चुका है कि, यदि स ऋण अथवा भिन्नीय हो तो द्विपद विस्तार य की $-१ < य < १$ अर्हाओं के लिए संगत है। अब उन दशाओं पर विचार किया जायगा जिनमें य संख्या की दृष्टि से १ से छोटा है

दशा १ —मान लो स धन भिन्न है।

यह ज्ञात है कि

$$प_{न+१} = \frac{स-न+१}{न} य \times प_न$$

$$= \left[\frac{स+१}{न} - १\right] य \times प_न$$

गुणन करने वाला खण्ड $\left[\frac{स+१}{न}-१\right]$य, जब तक न < स+१ है, धन होगा। इस प्रक्रम (stage) से आगे यह ऋण हो जाता है किन्तु संख्या कि दृष्टि से सदैव १ से छोटा रहता है।

अब $\left[\frac{स+१}{न}-१\right]य \gtreqless १$ तदनुसार $प_{त+१} \gtreqless प_त$

अथवा $न \lesseqgtr \frac{स+१}{१+य}$ य तदनुसार $प_{त+१} \gtreqless प_त$

(क) यदि $\frac{स+१}{१+य}$ य पूर्णांक त के सम हो तो न की (त−१) तक सब अर्हाएं $\frac{स+१}{१+य}$य से छोटी हैं। न की इन अर्हाओं के लिए प्रत्येक पद पिछले पद से बड़ा है।

अतः $प_त > प_{त-१} > प_{त-२} \cdots\cdots > प_२ > प_१$

∴ इन पदों में $प_त$ महत्तम पद है।

जब न = त तब $प_त = प_{त+१}$

न की (त+१) के आगे की अर्हाएं $\frac{स+१}{१+य}$ य से बड़ी हैं। अतः न की इन अर्हाओं के लिए

$प_{त+१} > प_{त+२} > प_{त+३} \cdots\cdots\cdots\cdots$

∴ इन पदों में $प_{त+१}$ महत्तम पद है।

अतः यदि $\frac{स+१}{१+य}$ य पूर्णांक त के सम हो तो $प_त$ और $प_{त+१}$ दो महत्तम पद प्राप्त होते हैं और वे एक दूसेर के समान होते है।

(ख) यदि $\frac{स+१}{१+य}$ य पूर्णांक न हो तो उसके अनुकल भाग का थ से अभिधान करो।

न की थ तक सब अर्हाएं $\frac{स+१}{१+य}$ य से छोटी हैं। इसलिए न की इन अर्हाओं के लिए

$$प_{थ+१} > प_थ > प_{थ-१} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots > प_३ > प_१ > प_१$$

न की थ से आगे की अर्हाओं के लिए

न, $\frac{स+१}{१+य}$ य से बड़ा हैं।

अतः न की इन अर्हाओं के लिए

$$प_{थ+१} > प_{थ+२} > प_{थ+३} \cdots\cdots$$

अतः इस दशा में स्पष्टतः $प_{थ+१}$ महत्तम पद है।

दशा२— मानलो स की अर्हा ऋण है और −म के सम है। यहां म घन होगा।

अब $\frac{स-न+१}{न}$ य की संख्यात्मक अर्हा $\frac{म+न-१}{न}$ य अर्थात्

$$\left[\frac{म-१}{न}+१\right] \text{ य होती है}$$

$$\text{अब } \left[\frac{म-१}{न}+१\right] य \gtreqless १$$

अथवा $न \gtreqless \frac{म-१}{१-य}य$ तदनुसार $प_{न+१} \gtreqless प_न$

(क) यदि $\left(\frac{म-१}{१-य}\right)य$, त के सम धन पूर्णांक हो तो पिछली दशा की रीति से यह बताया जा सकता है कि $(त+१)^{वां}$ और $त^{वां}$ पद महत्तम पद हैं और वे एक दूसरे के समान हैं।

यदि $\frac{म-१}{१-य}य$ धन हो किन्तु पूर्णांक न हो और उसका अनुकल भाग थ हो तो $(थ+१)^{वां}$ पद महत्तम है।

(ख) यदि $\frac{म-१}{१-य}य$ ऋण हो तो म, १ से छोटा होगा। यह देखा जा सकता है कि गुणन करने वाला खण्ड सदैव १ से छोटा है। अतः प्रत्येक पद पिछले पद से छोटा होगा। इसलिए पहला पद सबसे बड़ा होगा।

१२.७१ उदाहरण— यदि $य=\frac{१}{३}$ तथा $स=१५$ हो तो $(१+य)^{-स}$ के विस्तार में महत्तम पद निकालो।

यह ज्ञात है कि

$$प_{न+१} = \frac{स+न-१}{न}य \times प_न \text{ [संख्या की दृष्टि से}$$

$$= \frac{१४+न}{न} \times \frac{१}{३} प_न$$

$$\therefore \frac{१४+न}{न} \times \frac{१}{३} \gtreqless १$$

अथवा $१४ + न \gtreqless ३ न$

अथवा $न \lesseqgtr ७$ के अनुसार $प_{न+१} \gtreqless प_न$ होगा।

$न < ७$ के लिए अर्थात् $न = १, २, ३, \ldots\ldots ६$ के लिए

$प_७ > प_६ < प_५ \ldots > प_२ > प_१$

$न = ७$ के लिए $\qquad प_७ = प_८$

$न > ७$ के लिए

$प_८ > प_९ > प_{१०} \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

अतः स्पष्टतः ७वां और ८वां पद दोनों सब से बड़े हैं और वे एक दूसरे के समान हैं।

१२.८ कुछ साधित प्रश्न—

उदाहरण १— यदि य इतना छोटा हो कि उसके वर्ग और उच्चतर घात उपेक्ष्य हों तो

$$\frac{\sqrt[३]{१ - \frac{३}{७} य} + \left(१ - \frac{३}{५} य\right)^{-५}}{\sqrt[४]{१ + \frac{१}{२} य} + \sqrt[३]{१ - \frac{७}{३} य}}$$ की अर्हा निकालो।

क्योंकि $य^२$ और य के उच्चतर घात उपेक्ष्य हैं इसलिए य के प्रथम घात के पदों को रखना पर्याप्त होगा।

पद्संहृति

$$= \frac{\left(१ - \frac{३}{७}\text{य}\right)^{\frac{१}{३}} + \left(१ - \frac{३}{५}\text{य}\right)^{-५}}{\left(१ + \frac{१}{२}\text{य}\right)^{\frac{१}{४}} + \left(१ - \frac{७}{३}\text{य}\right)^{\frac{१}{७}}}$$

$$= \frac{\left(१ - \frac{१}{३} \times \frac{३}{७}\text{य} \ldots\right) + \left[१ + (-५)\left(-\frac{३}{५}\text{य}\right) + \ldots\ldots\right]}{\left(१ + \frac{१}{४} \times \frac{१}{२}\text{य} + \ldots\ldots\right) + \left(१ - \frac{१}{७} \times \frac{७}{३}\text{य} + \ldots\ldots\right)}$$

$$= \frac{१ - \frac{१}{७}\text{य} + १ + ३\text{य}}{१ + \frac{१}{८}\text{य} + १ - \frac{१}{३}\text{य}}$$

$$= \frac{२ + \frac{२०}{७}\text{य}}{२ - \frac{५}{२४}\text{य}}$$

$$= \frac{\left(१ + \frac{१०}{७}\text{य}\right)}{१ - \frac{५}{४८}\text{य}}$$

$$=\left(१+\frac{१०}{७}य\right)\left(१-\frac{५}{४८}य\right)^{-१}$$

$$=\left(१+\frac{१०}{७}य\right)\left(१+\frac{५}{४८}य\right)$$

$$=१+\frac{१०}{७}य+\frac{५}{४८}य$$

$$=१+\frac{५१५}{३३६}य$$

उदाहरण २— $\frac{१}{\sqrt{९९}}$ की आठ दशमिक स्थानों तक शुद्ध अर्हा निकालो।

$$\frac{१}{\sqrt{९९}}=(९९)^{-\frac{१}{२}}$$

$$=(१०^{२}-१)^{-\frac{१}{२}}$$

$$=\frac{१}{१०}\left[१-\frac{१}{१०^{२}}\right]^{-\frac{१}{२}}$$

$$=\frac{१}{१०}\left[१+\left(-\frac{१}{२}\right)\left(+\frac{१}{१०^{२}}\right)\right.$$

$$+\frac{(-\frac{१}{२})(-\frac{१}{२}-१)}{१\times२}\left(+\frac{१}{१०^{२}}\right)^{२}$$

$$+\frac{(-\frac{१}{२})(-\frac{१}{२}-१)(-\frac{१}{२}-२)}{१\times२\times३}\left(-\frac{१}{१०^{२}}\right)^{३}+\ldots\Big]$$

$$=\Big[१+\frac{१}{२}\times\frac{१}{१०^{२}}+\frac{१\times३}{२^{३}\times१०^{४}}$$

$$+\frac{१\times३\times५}{१\times२\times३\times२^{३}}\times\frac{१}{१०^{६}}+\ldots\ldots\Big]$$

$$=\frac{१}{१०}+\frac{१}{२\times१०^{३}}+\frac{१\times३}{२^{३}\times१०^{५}}$$

$$+\frac{१\times३\times५}{२^{४}\times१०^{७}}+\ldots\ldots$$

प्रत्येक पद की गणना करने पर

पहला पद $=\frac{१}{१०}=\cdot१$

दूसरा पद $=\frac{१}{२\times१०^{३}}=\cdot०००५$

तीसरा पद $=\frac{१\times३}{१^{३}\times१०^{५}}=\cdot००००३७५$

चौथा पद $=\frac{१\times५}{२^{४}\times१०^{७}}=\cdot००००००३१२५$

इन पदों के योग से

$$= .१ + .०००५ + .००००० ३७५ + .००००००० ३१२५$$

$$= .१००५०३७८$$

$$\therefore \frac{१}{\sqrt{९९}} = .१००५०३७८$$

उदाहरण ३— $(१+य+य^२)^{-१}$ के विस्तार में $य^{१०}$ का गुणक निकालो। [नागपुर १९३१

$$(१+य+य^२)^{-१} = \frac{१}{१+य+य^२}$$

$$= \frac{१-य}{(१-य)(१+य+य^२)}$$

$$= \frac{१-य}{१-य^३}$$

$$= (१-य)(१-य^३)^{-१}$$

$$= (१-य)(१+य^३+य^६+य^९+य^{१२}+\ldots\ldots\infty)$$

∴ $य^{१०}$ का गुणक स्पष्टतया -१ है।

उदाहरण ४— द्विपद प्रमेय से सिद्ध करो कि

$$१+\frac{१}{४}+\frac{१\times३}{४\times८}+\frac{१\times३\times५}{४\times८\times१२}+\ldots\ldots\infty = \sqrt{२}$$

$\left[१+\frac{१}{४}+\frac{१\times३}{४\times८}+\frac{१\times३\times५}{४\times८\times१२}+\ldots\ldots\infty\right]$ इस श्रेढी-पर विचार करो। इसे इस प्रकार लिख सक्ते हैं—

$$१+\frac{१}{२\times२}+\frac{\frac{१}{२}\times\frac{३}{२}}{१\times२}\times\frac{१}{२^२}+\frac{\frac{१}{२}\times\frac{३}{२}\times\frac{५}{२}}{१\times२\times३\times२^३}+\ldots\infty$$

$$\text{अथवा } १+\frac{-\frac{१}{२}}{१}\left(-\frac{१}{२}\right)+\frac{\left(-\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{२}-१\right)}{१\times२}\left(-\frac{१}{२}\right)^२+$$

$$+\frac{\left(-\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{२}-१\right)\left(-\frac{१}{२}-२\right)}{१\times२\times३}\left(-\frac{१}{२}\right)^३+\ldots\ldots\infty$$

किन्तु यह $(१-\frac{१}{२})^{-\frac{१}{२}}$ का विस्तार है।

$$\therefore\ १+\frac{१}{४}+\frac{१\times३}{४\times८}+\frac{१\times३\times५}{४\times८\times१२}+\ldots\ldots\infty$$

$$=(१-\tfrac{१}{२})^{-\frac{१}{२}}$$

$$=\left(\frac{१}{२}\right)^{-\frac{१}{२}}$$

$$=२^{\frac{१}{२}}$$

$$=\sqrt{२}$$

प्रश्नावलि १८

(१) निम्नलिखित विस्तारों में $(न+१)^{वा}$ पद निकालो—

(च) $(१+य)^{-\frac{३}{२}}$ (छ) $(१-य)^{-\frac{१}{२}}$

(ज) $(१+२य)^{\frac{१}{२}}$ (झ) $(१+य^{२})^{-२}$

(ट) $(३-य)^{-३}$ (ठ) $\frac{१}{\sqrt[स]{क-य}}$

(ड) $\frac{१}{\sqrt[३]{(१-२य)^{२}}}$ (ढ) $\frac{१}{\sqrt[३]{१-३य}}$

(२) इन विस्तारों में देशित गुणक निकालो—

(च) $(१-५य)^{-\frac{३}{४}}$ में $य^{७}$ का [कलकत्ता १९१०

(छ) $(क^{३}+३खय^{२})^{-५}$ में $य^{६}$ और $य^{१०}$ का [कलकत्ता १८७८

(ज) $\left(\frac{य^{\frac{१}{२}}}{७}-\frac{२}{य^{\frac{१}{२}}}\right)^{-१४}$ में $य^{७}$ का

(३) $(१-४य)^{\frac{१}{२}}$ के विस्तार में प्रथम चार पद निकालो। [कलकत्ता १९२३

(४) $(क^{२}-२कय)^{\frac{३}{२}}$ का य के आरोही घातों में $य^{५}$ तक विस्तार करो और सामान्य पद निकालो।

(५) $(क^{२}+य)^{\frac{१}{२}}$ का ५ पदों तक विस्तार करो।

(६) $(१-३य)^{\frac{७}{३}}$ के विस्तार मे $य^{न}$ का गुणक निकालो।

(७) $\frac{(१+य)^{२}}{(१-य)^{३}}$ के विस्तार में $य^{स}$ का गुणक निकालो।

(८) निम्न लिखित विस्तारों में महत्तम पद निकालो—

(क) $(१+य)^{\frac{११}{२}}$ में $य=\frac{१}{३}$ के लिए

(ख) $(१+य)^{-९}$ में $य=\frac{४}{९}$ के लिए

(ग) $(१-य)^{-\frac{७}{३}}$ में $य=\frac{१२}{१५}$ के लिए

(९) इन राशियों की अर्हार्घ निकालो—

(क) $(४·०८)^{\frac{१}{२}}$ की ६ दशमिक स्थानों तक।

(ख) $(१·०४)^{\frac{१}{१०}}$ की ४ दशमिक स्थानों तक।

(ग) $(१·००२)^{५}$ की ६ दशमिक स्थानों तक।

(घ) $(८·१६)^{-\frac{१}{३}}$ की ४ दशमिक स्थानों तक।

(१०) नीचे लिखे विस्तारों में य के यथा निर्दिष्ट घातों के गुणक निकालो—

(क) $\frac{१+य}{(१-य)^{३}}$ के विस्तार में $य^{१०}$ का।

[कलकत्ता १९३७

(ख) $\frac{१-२य}{(३+२य-य^{२})}$ के विस्तार में $य^{९}$ का।

[कलकत्ता १९०९

(ग) $\frac{१+य}{१-य}$ के विस्तार में $य^{५}$ का। [कलकत्ता १९१९

(घ) $(१-९य+२०य^{२})^{-१}$ के विस्तार में $य^{न}$ का।

[बम्बई १८९३

(ङ) $\frac{(१+३य)^{३}}{(१+२य)^{२}}$ के विस्तार में $य^{स}$ का [बम्बई १८९१

(११) दिखाओ कि यदि $-१<य<१$ हो तो

$$(१+य+य^{२}+य^{३}+\ldots\ldots)^{२}=१+२य+३य^{२}+\ldots\ldots+सय^{स-१}+\ldots\ldots$$

(१२) यदि $-१<य<१$ हो तो—

$(१+२य+३य^{२}४+य^{३}+\ldots\ldots)^{५}$ के विस्तार में $य^{४}$ का गुणक निकालो।

यदि य इतना छोटा हो कि उसके वर्ग और उच्चतर घात उपेक्ष्य हैं तो सिद्ध करो कि

(१३) $$\frac{(८+३य)^{\frac{२}{३}}}{(२+३य)\sqrt{८-५य}}=१-\frac{५य}{८} \text{ लगभग}$$

[नागपुर १९३३

(१४) $$\frac{(१+\frac{३}{२}य)^{-४}+(१-२य)^{-१}}{(१+\frac{३}{२}य)^{-३}+(१+य)^{-१}}=१+२य \text{ लगभग}$$

[नागपुर १९३८

(१५) $$\frac{(१-३य)^{\frac{१}{२}}+(१-य)^{\frac{५}{३}}}{(४+य)^{\frac{१}{२}}}=१-\frac{५१}{२८}य \text{ लगभग}$$

[नागपुर १९५६

(१६) $$\frac{(९+२य)^{\frac{१}{२}}(३+४य)}{(१-य)^{\frac{१}{५}}}=९+\frac{७४}{५}य \text{ लगभग}$$

द्विपद विस्तार से नीचे लिखी अनन्त श्रेढियों का योग निकालो —

(१७) $$१+\frac{२}{१}\times\frac{१}{३^२}+\frac{२\times५}{१\times२}\times\frac{१}{३^४}+\frac{२\times५\times८}{१\times२\times३}\times\frac{१}{३^६}+\dots\dots\dots$$

(१८) $$१+\frac{१}{३}+\frac{१}{३}\times\frac{२}{६}+\frac{१}{३}\times\frac{३}{६}\times\frac{५}{९}+\dots$$

[इलाहाबाद १९२२

(१९) $$१+\frac{३}{४}+\frac{३\times५}{४\times८}+\frac{३\times५\times७}{४\times८\times१२}+\dots\dots$$

(२०) $$\frac{३}{१}+\frac{३\times५}{१\times२}\times\frac{१}{३}+\frac{३\times५\times७}{१\times२\times३}\times\frac{१}{३^२}+\dots\dots$$

[मद्रास १९४०

(२१) यदि $\frac{द}{ठ}$ इतना छोटा है कि उसके घन और उच्चतर घात उपेक्ष्य हैं तो दिखाओ कि

$\left(\frac{ठ}{ठ+ट}\right)^{\frac{१}{२}}+\left(\frac{ठ}{ठ-ट}\right)^{\frac{१}{२}}$ लगभग $२+\frac{३ट^२}{४ठ^२}$ के सम है। [नागपुर १९२७

(२२) सिद्ध करो कि—

$$\frac{७}{५}\left[१+\frac{१}{१०^२}+\frac{१\times३}{१\times२}\times\frac{१}{१०^४}+\frac{१\times३\times५}{१\times२\times३}\times\frac{१}{१०^६}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\infty\right. = \sqrt{२}$$

(२३) यदि $र = य + य^२ + य^३ + \ldots\ldots\ldots\infty$ तो य को र के आरोही घातों की श्रेढी के पदों में व्यक्त करो।

(२४) यदि $र = २य + ३य^२ + ४य^३ + \ldots\ldots$ तो य को र के आरोही घातों की श्रेढी के पदों में व्यक्त करो।

(२५) सिद्ध करो कि—

$$\left[\frac{१+य}{१-य}\right]^स = १ + स\frac{२य}{१+य} + \frac{स(स+१)}{१\times२}\times\frac{४य^२}{(१+य)^२}$$

$$+\ldots\ldots$$

तेरहवां अध्याय

छेदाएं

(logarithms)

१३.१ छेदा की परिभाषा—

यदि क, य, तथा र तीन राशियां ऐसी हों कि

$$क^{य} = र \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

तो घात य, आधार क पर, र की छेदा कहलाता है। यह इस प्रकार लिखा जाता है—

$$य = छे_{क} र \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

क (आधार), र (राशि) तथा य (घात अथवा छेदा) इन तीन राशियों के एक ही सम्बन्ध को व्यक्त करने के समीकार (१) और (२) ये दो प्रकार हैं।

सम्बन्ध (१) घातीय रूप में है और (२) उसी सम्बन्ध को छेदा के रूप में व्यक्त करता है।

परिभाषा— दत्त आधार पर किसी राशि की छेदा उस घात के सम है, जिस तक आधार का उन्नयन करने से वही राशि प्राप्त होती है।

और यदि दत्त आधार पर, र की छेदा य हो तो, र,

उसी आधार पर य की प्रतिच्छेदा (anti logarithm) कहलाता है ।

१३.११ उदाहरण १—

क्योंकि $२^६ = ६४$

इसलिए $छे_२ ६४ = ६$

उदाहरण २— क्योंकि $३^{-४} = \frac{१}{८१}$

इसलिए $छे_३ \left(\frac{१}{८१}\right) = -४$

उदाहरण ३— क्योंकि $३^{\frac{३}{४}} = \sqrt[४]{२७}$

इसलिए $छे_३ \sqrt[४]{२७} = \frac{३}{४}$

उदाहरण ४— क्योंकि $क^१ = क$

इसलिये $छे_क क = १$

[किसी भी आधार क के लिए

उदाहरण ५— क्योंकि $क^० = १$

इसलिए $छे_क १ = ०$

[किसी भी आधार क के लिये

उपर्युक्त उदाहरणों से इन फलों का अनुमान किया जाता है ।

(१) किसी भी आधार पर १ की छेदा शून्य होती है

(२) किसी भी राशि की छेदा उसी राशि के आधार पर, १ होती है।

(३) छेदा धन, ऋण पूर्णांक अथवा भिन्न हो सकती हैं।

१३.२ छेदाओं के लिए निम्न प्रमेयों का उपपादन किया जायगा।

(१) दत्त आधार पर दो राशियों के गुणनफल की छेदा उसी आधार पर उन्हीं दो राशियों की छेदाओं के योग के सम होती है अर्थात्

$छे_क(म \times न) = छे_क म + छे_क न$

मान लो $य = छे_क म$ अतः $क^य = म$

तथा $र = छे_क न$ अतः $क^र = न$

अब $म \times न = क^य क^र = क^{य+र}$

अतः $छे_क(म \times न) = य + र$ [परिभाषानुसार

$= छे_क म + छे_क न$

(२) दत्त आधार पर लब्धि की छेदा उसी आधार पर के भाज्य की छेदा से वियुत उसी आधार पर के भाजक की छेदा के सम होती है।

अर्थात् $छे_क\left(\frac{म}{न}\right) = छे_क म - छे_क न$

उपर्युक्त कल्पना के अनुसार

$\frac{म}{न} = \frac{क^य}{क^र} = क^{य-र}$

अतः $\text{छेक}\left(\frac{\text{म}}{\text{न}}\right) = \text{य} - \text{र}$ [परिभाषानुसार

$= \text{छेक}_{\text{क}}\text{म} - \text{छेक}_{\text{क}}\text{न}$

उदाहरण १ —

$$\text{छेक}_{\text{क}}\ (३३ \times ६५) = \text{छेक}_{\text{क}}३३ + \text{छेक}_{\text{क}}६५$$
$$= \text{छेक}_{\text{क}}(११ \times ३) + \text{छेक}_{\text{क}}(१३ \times ५)$$
$$= \text{छेक}_{\text{क}}११ + \text{छेक}_{\text{क}}३ + \text{छेक}_{\text{क}}१३ + \text{छेक}_{\text{क}}५$$

उदाहरण २ —

$$\text{छेक}_{\text{क}}\ \frac{(१७ \times २३७ \times ४७)}{(२३ \times ५७)}$$
$$= \text{छेक}_{\text{क}}(१७ \times २३७ \times ४७) - \text{छेक}_{\text{क}}(२३ \times ५७)$$
$$= \text{छेक}_{\text{क}}१७ + \text{छेक}_{\text{क}}२३७ + \text{छेक}_{\text{क}}४७ - \text{छेक}_{\text{क}}२३ - \text{छेक}_{\text{क}}५७$$
$$= \text{छेक}_{\text{क}}१७ + \text{छेक}_{\text{क}}(३ \times ७९) + \text{छेक}_{\text{क}}४७$$
$$- \text{छेक}_{\text{क}}२३ - \text{छेक}_{\text{क}}(३ \times १९)$$
$$= \text{छेक}_{\text{क}}१७ + \text{छेक}_{\text{क}}३ + \text{छेक}_{\text{क}}७९ + \text{छेक}_{\text{क}}४७ - \text{छेक}_{\text{क}}२३$$
$$- \text{छेक}_{\text{क}}३ - \text{छेक}_{\text{क}}१९$$
$$= \text{छेक}_{\text{क}}१७ + \text{छेक}_{\text{क}}७९ + \text{छेक}_{\text{क}}४७ - \text{छेक}_{\text{क}}२३ - \text{छेक}_{\text{क}}१९$$

(३) दत्त आधार पर किसी घातयुक्त राशि की छेदा, उस राशि के घात और दत्त आधार पर उसी राशि की छेदा के गुणनफल के सम होती है।

अर्थात् $\text{छेक}(\text{म}^{\text{न}}) = \text{न}\,\text{छेक}_{\text{क}}\text{म}$ [न की सब अर्हायों के लिए

मान लो $\text{य} = \text{छेक}_{\text{क}}\text{म}$ अतः $\text{क}^{\text{य}} = \text{म}$

अब $म^{न} = (क^{य})^{न}$

$= क^{नय}$ [न की सब अर्हाओं के लिए

अतः $छे_{क} म^{न} = नय$ [परिभाषानुसार

$= न \times छे_{क} म$

प्रत्यक्ष रीति से $\sqrt[१७]{९९९}$ की अर्हा निकालना कठिन है किन्तु छेदा की सहायता से ९९९ का १७वाँ मूल निकालना सरल है।

$$छे_{१०} \sqrt[१७]{९९९} = \frac{१}{१७} छे_{१०} ९९९$$

दक्षिण पक्ष की अर्हा कैसे निकाली जा सकती है यह आगे बताया जायगा। दक्षिण पक्ष की अर्हा ज्ञात होने पर प्रतिच्छेदा सारणी की सहायता से अपेक्षित मूल निकाला जा सकता है।

१३.२१ उपर्युक्त प्रमेयों से यह ज्ञात होता है कि गुणन और भाजन क्रियाओं का क्रमशः योग और वियोग क्रियाओं से और $क^{न}$ समान राशियों की अर्हा निकालने की रीति का गुणन क्रिया से प्रतिस्थापन हो सकता है।

गुणन, भाजन, वर्गमूल निस्सारण...इत्यादि कठिन विधाओं को सरलता से करने के लिए छेदा की रीतियों का प्रयोग किया जाता है। इस प्रयोजन से, प्रमाप आधार पर, सब संख्याओं की छेदाओं का कुछ दशमिक स्थानों तक परिगणन किया गया है। तात्विक विवेचन में राशि घा जिसका अर्थ अगले अध्याय में स्पष्ट किया जायगा, आधार

मान ली जाती है, किन्तु व्यवहार में आधार १० लिया जाता है। प्रथमतः छेदाओं का परिगणन घा को आधार मानकर करते हैं, तत्पश्चात् आधार घा का 'स' में [किसी भी आधार में] परिवर्तन किया जाता है। आधार घा पर परिगणित छेदाएं प्राकृतिक छेदाएं (natural logarithms) कहलाती हैं क्योंकि बीजीय अनुसंधान में इन छेदाओं का स्वाभाविक रूप से प्रथमतः विचार किया जाता है।

१३.३ यह आवश्यक नहीं है कि किसी भी राशि की छेदा धन और पूर्णांक हो। यह इन उदाहरणों से स्पष्ट हो जायगा।

अब $१०^{य}$ = न में न कोई भी राशि है और आधार १० पर य उसकी छेदा है।

मान लो न = ५१३

अब $५१३ < १०^{३}$ किन्तु $> १०^{२}$

अथवा $१०^{२} < ५१३ < १०^{३}$

अतः $१०^{२+\text{लघ्वंश भिन्न}} = ५१३$

$\therefore$ य = छे ५१३ = २ + लघ्वंश भिन्न

अथवा छे ५१३ २ और ३ के बीच का धन भिन्न है।

पुनः न = ·०४ पर विचार करो।

$·०४ > १०^{-२}$ और $< १०^{-१}$

अथवा $१०^{-२} < ·०४ < १०^{-१}$

अथवा $१०^{-२+\text{लघ्वंश भिन्न}} = ·०४$

$\therefore$ छे ·०४ = − २ + लघ्वंश भिन्न

अथवा छे·०४ ऋण भिन्न है।

१३.३१ लक्षण और दशमिकांश [characteristic and mantissa]

परिभाषाः— यदि किसी राशी की छेदा अंशतः पूर्णांक और अंशतः भिन्नांक हो, तो पूर्णांक भाग को छेदा का लक्षण (characteristic) और भिन्नीय भाग को छेदा का दशमिकांश (mantissa) कहते हैं।

१३.४ आधार १० पर किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण केवल अवलोकन से प्राप्त किया जा सकता है।

(१) १ से बड़ी संख्याओं की छेदाओं के लक्षणों का निश्चयन।

अब $१०^{१}=१०$

$१०^{२}=१००$

$१०^{३}=१०००$

....

....

इस से यह निष्कर्ष निकलता है कि, पूर्णांक भाग में दो अंकोंवाली संख्याएं $१०^{१}$ और $१०^{२}$ के बीच रहती हैं। पूर्णांक भाग में तीन अंकोंवाली संख्याएं $१०^{२}$ और $१०^{३}$ के बीच रहती हैं..........इत्यादि।

अतः पूर्णांक भाग में स अंकोंवाली संख्याएं $१०^{स-१}$ और $१०^{स}$ के बीच रहती हैं।

यदि न ऐसी संख्या हो जिसके पूर्णांक भाग में स अंक हों तो

$$न = १०^{(स-१)+लघ्वंश\ भिन्न}$$

$$\therefore\ छे\ न = (स - १) + लघ्वंश\ भिन्न$$

अतः न की छेदा का लक्षण (स - १) है। अर्थात् १ से बड़ी संख्या की छेदा का लक्षण धन, और उस संख्या के पूर्णांक भाग के अंकों की संख्या से १ कम होता है।

(२) १ से छोटी दशमिक भिन्न की छेदा का लक्षण ऋण, और दशमिक चिह्न के पश्चात् तत्काल आने वाले शून्यों की संख्या से १ अधिक होता है।

मान लो घ दशमिक भिन्न है, जिसमें दशमिक चिह्न के पश्चात् 'द' शून्य तत्काल आते हैं।

अब $१०^{०} = १$

$$१०^{-१} = \frac{१}{१०} = \cdot१$$

$$१०^{-२} = \frac{१}{१००} = \cdot०१$$

$$१०^{-३} = \frac{१}{१०००} = \cdot००१$$

....

....

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि दशमिक भिन्न जिसमें

दशमिक चिह्न के पश्चात् कोई शून्य तत्काल नहीं आते $१०^{-१}$ और $१०^{०}$ के बीच रहता है; दशमिक भिन्न जिसमें दशमिक चिह्न के पश्चात् एक शून्य तत्काल आता हो $१०^{-२}$ और $१०^{-१}$ के बीच रहता है; दशमिक भिन्न जिसमें दशमिक चिह्न के पश्चात् दो शून्य तत्काल आते हों $१०^{-३}$ और $१०^{-२}$ के बीच रहता है...... इत्यादि। अतः दशमिक भिन्न जिसमें दशमिक चिह्न के पश्चात् द शून्य तत्काल आते हों $१० ^{-(द+१)}$ और $१०^{-द}$ के बीच रहता है।

अर्थात् $१०^{-द} > ध > १०^{-(द+१)}$

$\therefore \quad ध = १०^{-(द+१)} +$ लघ्वंश भिन्न

$\therefore \quad$ छे (ध) $= \; -(द+१) +$ लघ्वंश भिन्न

अतः दशमिक चिह्न के पश्चात् तत्काल द शून्यवाले दशमिक भिन्न ध की छेदा का लक्षण $-(द+१)$ होता है।

१३.५ सार्थक (significant) अंकों के एक ही अनुक्रम वाली सब राशियों की छेदाओं का दशमिकांश एक ही होता है।

मान लो म तथा न ऐसी दो संख्याएं हैं जिनमें सार्थक अंकों का अनुक्रम एक ही है अर्थात् दोनों संख्याओं में केवल दशमिक चिह्न के स्थान में ही भेद है। अब किसी भी संख्या का घात युक्त १० से गुणन अथवा भाजन करने पर अंकों के अनुक्रम में परिवर्तन हुए बिना, केवल दशमिक चिह्न के स्थान में परिवर्तन होता है। इसलिए किसी उपयुक्त घात युक्त १० से न का गुणन अथवा भाजन करने पर म प्राप्त होगा।

अतः $म = न \times १०^{त}$

[जहां त धन अथवा ऋण पूर्णांक है।

अब $छे_{१०} म = छे_{१०} (न \times १०^{त})$

[दोनों पक्षों की छेदाएं लेने पर

$= छे_{१०} न + छे_{१०} १०^{त}$

$= छे_{१०} न + त\, छे_{१०} १०$

$= छे_{१०} न + त$

अतः म की छेदा में और न की छेदा में केवल धन अथवा ऋण पूर्णांक का अन्तर है।

अतः सार्थक अंकोंवाली दो संख्याओं की छेदाओं का दशामिकांश समान होता है।

१३.५१ पिछले अनुच्छेदों में दशमिकांश धन माने गए हैं। सामान्य पद्धति (common system) में, जिसमें आधार १० माना गया है, क्रियाएं इस प्रकार विन्यस्त की जाती हैं कि दशमिकांश सदैव धन रहता है। उदाहरणार्थ छे·००३ पर विचार करो। इसका लक्षण −३ और दशमिकांश ·४७७१ है।

अतः छेदा अथवा (−३+·४७७१) ऋण है। किन्तु व्यवहार में दशमिकांश धन और केवल लक्षण ऋण रखा जाता है। यह दिखाने के लिए कि केवल लक्षण ही ऋण है, ऋण चिह्न लक्षण के उपर रखा जाता है। अतएव छे·००३ को $\bar{३}$·४७७१ इस प्रकार लिखते हैं। इस में $\bar{३}$ का अर्थ यह है कि ३ ऋण है और ४७७१ धन है। इसमें और −३·४७७१

में भेद करना चाहिए क्योंकि −३·४७७१ में पूर्णांश और भिन्नांक दोनों ऋण हैं। अतः

$$\bar{३}·४७७१ = -३ + ·४७७१$$

$$-३·४७७१ = -३ - ·४७७१$$

अब यह संभव है कि प्रश्न साधन करते समय छेदा ऐसे रूप में प्राप्त हो जिस में लक्षण और दशमिकांश दोनों ऋण हों। ठीक ठीक विन्यास से दशमिकांश धन किया जाता है। यह इस उदाहरण से स्पष्ट होगा।

छे $\left(\frac{१}{३}\right)$ की यहाँ निकालो

$$छे \frac{१}{३} = छे \frac{१०}{३०}$$

$$= छे १० + छे ३०$$

$$= १ - (१·४७७१)$$

$$= -·४७७१$$

किन्तु छे $\frac{१}{३}$ = −·४७७१ इस प्रकार लिखने की अपेक्षा

$$छे \frac{१}{३} = -१ + (१ - ·४७७१)$$

$$= -१ + ·५२२९$$

$= \bar{१}·५२२९$ इस प्रकार लिखा जाता है जिसमें दशमिकांश धन है।

१३.६ गत अनुच्छेदों में जो सिद्ध किया गया है उससे यह स्पष्ट होगा कि किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण केवल अवलोकन से प्राप्त किया जा सकता है। आधार १० पर सभी संख्याओं के दशमिकांशों का परिगणन किया गया है।

और उन्हें चार और सात स्थानों तक शुद्ध, गणितीय सारणियों के रूप में दिया गया है। किसी भी राशि स की छेदा का दशमिकांश सारणियों से निकालने की रीति यहां स्पष्ट की गई है। इस प्रयोजन से चार अंकों वाली सारणी का प्रयोग किया गया है, जिसका उद्धरण इस पुस्तक के अन्त में किया जायगा।

(क) छे ८८ निकालना।

छेदा-सारणी के प्रथम पृष्ठ में सबसे प्रथम (अंकों के) स्तंभ में संख्या ८८ देखो। अब ८८ को धारण करने वाली पंक्ति पर ध्यान दो। इस पंक्ति में और शून्य शीर्षक वाले स्तम्भ में रहने वाली संख्या ९४४५, छे ८८ का दशमिकांश है। (सारणी में दशमिक चिह्न नहीं दिया गया है। विद्यार्थियों को इसे संख्या के पहले रखना चाहिए।

क्योंकि संख्या ८८, १० और १०² के बीच में है, छे ८८ का लक्षण १ है।

अतः छे ८८=१.९४४५

(ख) छे ५ निकालना।

छे ५ का दशमिकांश छे ५० के दशमिकांश के समान है। यह पिछली रीति से निकाला जा सकता है। इसका लक्षण शून्य है।

∴ छे ५ = ०·६९९०

(ग) छे ६३·८ निकालना।

छे ६३·८ और छे ६३८ का दशमिकांश एक ही है। अतः सारणी के पृष्ठ में अंकों के स्तंभ में संख्या ६३ ढूंढो। ६३ को धारण करने वाली पंक्ति में और शीर्षक ८ वाले स्तंभ में रहने वाली संख्या ८०४८, छे ६३·८ का दशमिकांश है।

छे ६३·८ का लक्षण १ है

अतः छे ६३·८ = १·८०४८

(घ) छे ०·००८३४६ निकालना।

यहां अपेक्षित दशमिकांश छे ८३४६ के दशमिकांश के समान है। अतः सारणी के पृष्ठ में अंकों के स्तंभ में ८३ देखो। तत्पश्चात् ८३ को धारण करने वाली पंक्ति में और शीर्षक ४ वाले स्तंभ में रहने वाली संख्या ९२१२ पर रुको। यह छे ८३४ का दशमिकांश है। पुनः इसी (८३ को धारण करने वाली) पंक्ति में मध्यकान्तर की (mean difference) सारणी में शीर्षक ६ वाले स्तंभ में संख्या ३ (जो यथार्थ में ·०००३ है) प्राप्त होगी। ·०००३ को दशमिकांश ·९२१२ में जोड़ो। प्राप्त फल छे ०·००८३४६ का दशमिकांश है और छे ०·००८३४६ का लक्षण −२ है।

अत छे ०·००८३४६ = −२ + ·९२१५

यह सदैव छे ०·००८३४६ = $\bar{२}$·९२१५ इस प्रकार लिखा जाता है। इसका अर्थ यह है कि केवल लक्षण ऋण है किन्तु दशमिकांश धन है।

१३.७ प्रतिच्छेदा की परिभाषा इस प्रकार दी गई है कि यदि $छे_{क}न = य$ तो, आधार क पर, न, य की प्रतिच्छेदा कहलाता है।

यह इस प्रकार लिखा जाता है। $न = प्रतिच्छे_{क}य$।
प्रतिच्छेदा की सारणी इसी पुस्तक के अन्त में दी गई है। प्रतिच्छेदा निकालने की रीति इस उदाहरण से ज्ञात होगी।

प्रतिच्छे २·४७८९ निकालना।

प्रथम, लक्षण को छोड़ दो और केवल दशमिकांश ·४७८९ का अवलोकन करो। प्रतिच्छेदा की सारणी के पन्ने में सब से पहले स्तम्भ में ·४७ को देखो। फिर ·४७ वाली पंक्ति में और शीर्ष ८ के स्तम्भ की संख्या ३००६ पर रुको। पुनः इसी पंक्ति में मध्यकान्तर के स्तम्भों में शीर्ष ९ के नीचे की संख्या ६ (यथार्थ में ·०००६) को देखो। अतः प्रतिच्छे ·४७८९ के सार्थक अंक (·३००६+·०००६) अर्थात् ·३०१२ हैं। लक्षण २ के सम दिया गया है। अतः अपेक्षित संख्या के पूर्णांक भाग में तीन अंक होने चाहिए।

अतः प्रतिच्छे २·४७८९ = ३०१·२

१३.८ दत्त आधार पर छेदाएं ज्ञात होने पर, किसी भी आधार पर छेदा का परिगणन।

मान लो आधार क पर छेदाएँ ज्ञात हैं और संख्या न की छेदा दी गई है। अब आधार ख पर न की छेदा ज्ञात करना है।

मान लो $र = छे_{ख}न$ अतः $ख^{र} = न$

अतः $\text{छे}_{\text{क}}(\text{ख}^{\text{र}}) = \text{छे}_{\text{क}}\text{न}$

अर्थात् $\text{र} \times \text{छे}_{\text{क}}\text{ख} = \text{छे}_{\text{क}}\text{न}$

$$\therefore \quad \text{र} = \frac{१}{\text{छे}_{\text{क}}\text{ख}} \times \text{छे}_{\text{क}}\text{न}$$

अथवा $\text{छे}_{\text{ख}}\text{न} = \dfrac{\text{छे}_{\text{क}}\text{न}}{\text{छे}_{\text{क}}\text{ख}}$

अब न और ख दिए गए हैं और $\text{छे}_{\text{क}}\text{न}$ और $\text{छे}_{\text{क}}\text{ख}$ सारणी से ज्ञात किए जा सकते हैं। इसलिए $\text{छे}_{\text{ख}}\text{न}$ निकाला जा सकता है।

इससे यह ज्ञात होता है कि आधार क पर से आधार ख पर छेदाओं का रुपान्तरण करने के लिए उनका केवल $\dfrac{१}{\text{छे}_{\text{क}}\text{ख}}$ से गुणन करना पर्याप्त है। यह अचल राशि मापांक कहलाती है।

यदि $\text{छे}_{\text{ख}}\text{न} = \dfrac{\text{छे}_{\text{क}}\text{न}}{\text{छे}_{\text{क}}\text{ख}}$ इस समीकार में न=क रखा जाय तो

$$\text{छे}_{\text{ख}}\text{क} = \frac{\text{छे}_{\text{क}}\text{क}}{\text{छे}_{\text{क}}\text{ख}}$$

अर्थात् $\text{छे}_{\text{ख}}\text{क} \times \text{छे}_{\text{क}}\text{ख} = १$

१३.९ गणितीय परिगणन को सरल करने में छेदाओं का उपयोग आगे दिए साधित उदाहरणों से स्पष्ट होगा।

उदाहरण १— ३८७ का घनमूल निकालो।

मान लो $\text{य} = \sqrt[3]{३८७}$

अतः $य^3 = ३८७$

दोनो पक्षों की छेदाएं लेने से

$३ \text{ छेय} = \text{छे } ३८७$

$= २\cdot५८७७$

अतः $\text{छेय} = \cdot८६२५६$

$= \cdot८६२६$

$\therefore \quad य = \text{प्रतिच्छे}\cdot८६२६$

$= ७\cdot२८८$ [प्रतिच्छेदा निकालने पर

अतः $\sqrt[3]{३८७} = ७\cdot२८८$

उदाहरण २— तीन सार्थक अंकों तक

$\sqrt[७]{\left(\frac{८८७ \times ७३९}{२३५७ \times ११७}\right)^४}$ की अर्हा निकालो ।

मान लो $य = \sqrt[७]{\left(\frac{८८७ \times ७३९}{२३५७ \times ११७}\right)^४}$

$\therefore \quad \text{छेय} = \text{छे } \left(\frac{८८७ \times ७३९}{२३५७ \times ११७}\right)^{\frac{४}{७}}$

$= \frac{४}{७}\left(\text{छे}८८७ + \text{छे}७३९ - \text{छे } २३५७ - \text{छे}११७\right)$

$= \frac{४}{७}\Big[२\cdot२४७९ + २\cdot८६८६ - ३\cdot३७२$

$- २\cdot०६८२\Big]$

$= \frac{४}{७}\left[\cdot ३७६३\right]$

$= \cdot २१५०$

$\therefore$ य $=$ प्रतिच्छे $\cdot २१५०$

$= १\cdot ६४१$

उदाहरण ३— यदि छे२ = ·३०१० और छे ७ = ·८४५१ तो ९८० की छेदा निकालो।

छे ९८० = छे१० × २ × ७²

= छे१० + छे२ + छे७²

= छे१० + छे२ + २छे७

= १ + ·३०१० + १·६९०२

= २·९९१२

उदाहरण ४— यदि छे २ = ·३०१० और छे ३ = ·४७७१ तो ६⁵⁷ में अंकों की संख्या निकालो।

मान लो ६⁵⁷ की छेदा य है

$\therefore$ य = छे ६⁵⁷

= ५७ छे २ × ३

= ५७ [छे२ + छे ३]

= ५७ [·३०१० + ·४७७१]

= ५७ [·७७८१]

= ४४·३५१७

अतः लक्षण ४४ है।

अतः ६⁵⁷ में अंकों की संख्या ४५ है

उदाहरण ५— साधन करो।

$$६^{३-४य} \times ४^{य+५} = ८$$ [फलकत्ता १९३८

दोनों पक्षों की छेदाएं लेने से

$(३-४य)$ छे $६ + (य+५)$ छे $४ =$ छे८

$$\therefore य = \frac{छे८ - ५छे४ - ३छे६}{छे४ - ४छे६}$$

$$= \frac{छे२^३ - ५छे२^२ - ३छे२\times३}{छे२^२ - ४छे२\times३}$$

$$= \frac{३छे२ - १०छे२ - ३छे२ - ३छे३}{२छे२ - ४छे२ - ४छे३}$$

$$= \frac{१०छे२ + ३छे३}{२छे२ + ४छे३}$$

$$= \frac{१० \times \cdot३०१० + ३ \times \cdot४७७१}{२ \times \cdot३०१० + ४ \times .४७७१}$$

$$= \frac{४\cdot४४१३}{२\cdot४१०४}$$

$= १\cdot७$ के लगभग

उदाहरण ६— दिखाओ कि

$$७ छे \frac{१६}{१५} + ५छे \frac{२५}{२४} + ३छे \frac{८१}{८०} = छे२$$

[कलकत्ता १९३६

वाम पक्ष = ७छे१६ − ७छे१५ + ५छे२५ − ५छे२४ + ३छे८१ − ३छे८०

$= ७छे२^{४} − ७छे३ \times ५ + ५छे५^{२} − ५छे२^{३} \times ३ + ३छे३^{४} − ३छे५ \times २^{४}$

= २८छे२ − ७छे३ − ७छे५ + १०छे५ − १५छे२ − ५छे३ + १२छे३ − ३छे५ − १२छे२

= छे२

प्रश्नावलि १९

(१) आधार २ पर २५६, १२८, [illegible], ·२५, ०·०६२५ की छेदार्प निकालो।

(२) आधार ३ पर २१८७, २४३ की छेदार्प निकालो।

(३) आधार ५ पर ६२५, ३१२५, ·००१६ की छेदार्प निकालो।

(४) (क) आधार $२\sqrt{३}$ पर १४४ की

(ख) आधार $\sqrt{७}$ पर ३४३ की

(ग) आधार $२\sqrt{२}$ पर ५१२ की

(घ) आधार $\sqrt{य}$ पर $\sqrt[९]{य^{\frac{२}{६}}}$ की छेदार्प निकालो।

(५) निम्नलिखित छेदार्पों को छे क, छे ख और छे ग के पदों में व्यक्त करो।

(अ) छे $(क^{\frac{१}{५}} \times ख^{७} ग^{-८})$

(आ) छे $(क^{३} ख^{-१} ग^{५})^{\frac{१}{३}}$

(इ) छे $(\sqrt[५]{क^{-५} ख^{१५} ग^{१०}})$

(ई) छे $\left[\frac{\sqrt[१२]{क^{२१} ख^{११७} ग^{-३१}}}{(क^{३} ख^{-१} ग^{५})^{\frac{१}{३}}}\right]$

(६) दिखाओ कि

$$७ छे \frac{१०}{९} - २ छे \frac{२५}{२४} + ३ छे \frac{८१}{८०} = छे २$$

[कलकत्ता १९३७

(७) दिखाओ कि

$$छेवा १० = २२ छेवा \frac{१०}{९} - छेवा \frac{२५}{२४} + १० छेवा \frac{८१}{८०}$$

(८) नीचे दी हुई संख्याओं की छेदाओं के लक्षण निकालो।
(क) १९४७ (ख) ३५९८७५ (ग) ·२ (घ) ·००२
(ङ) ·००००००७

इन समीकारों का साधन करो—

(९) $क^{३-य} ख^{५य} = क^{य+५} ख^{३य}$ [कलकत्ता १९३७

(१०) $३^{य} = ५$

(११) $२^{य} \times ३^{य} = १००$

(१२) $य^{र} = र^{य}$ और $र = २य$ [कलकत्ता १९३५

(१३) $३^{२य} \times ५^{३य-४} = ७^{य-१} \times ११^{२य}$ [मद्रास १९२८

(१४) $\text{छे}\,(\text{य}^{२}\text{र}^{३}) = \text{क}$ और $\text{छे}\,\dfrac{\text{य}}{\text{र}} = \text{ख}$ [कलकत्ता १९१९

(१५) सिद्ध करो कि

$$\text{य}^{(\text{छेर}-\text{छेल})} \times \text{र}^{(\text{छेल}-\text{छेय})} \times \text{ल}^{(\text{छेय}-\text{छेर})} = १$$

(१६) सिद्ध करो कि

$$\text{छे}_{\text{ख}}\text{क} \times \text{छे}_{\text{ग}}\text{ख} \times \text{छे}_{\text{क}}\text{ग} = १$$

चौदहवां अध्याय

घातांक और छेदा श्रेढियां

(exponential and logarithmic series)

१४.१ $क^{र}$ इस प्रतीक का निश्चित अर्थ पहले ही दिया जा चुका है। अब $क^{र}$ का विस्तार र के आरोही घातों में किया जायगा और इससे कुछ ऐसी महत्त्वपूर्ण प्राप्त की जायंगी जिनका उपयोग किसी भी संख्या छेदा का परिगणन करने में किया जा सकेगा।

१४.२ $क^{र}$ का र के आरोही घातों में विस्तार

द्विपद प्रमेय के अनुसार यदि $\frac{१}{स}$ संख्यात्मक दृष्टि से १ से छोटा हो तो

$$\left(१+\frac{१}{स}\right)^{सय} = १+सय\times\frac{१}{स}+\frac{सय(सय-१)}{१\times२}\frac{१}{स^{२}}+\frac{सय(सय-१)(सय-२)}{१\times२\times३}\times\frac{१}{स^{३}}\cdots\cdots$$

$$=१+य+\frac{य\left(य-\frac{१}{स}\right)}{१\times२}+\frac{य\left(य-\frac{१}{स}\right)\left(य-\frac{२}{स}\right)}{१\times२\times३}+\cdots\cdots\cdots\cdots(१)$$

उपर्युक्त फल में यदि य = १ रखा जाय तो

$$\left(१+\frac{१}{स}\right)^{स} = १+१+\frac{१(१-\frac{१}{स})}{१\times२}+\frac{१(१-\frac{१}{स})(१-\frac{२}{स})}{१\times२\times३} + \ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

किन्तु $\left(१+\frac{१}{स}\right)^{सय} = \left[\left(१+\frac{१}{स}\right)^{स}\right]^{य}$

अतः

$$१+य+\frac{य\left(य-\frac{१}{स}\right)}{१\times२}+\frac{य\left(य-\frac{१}{स}\right)\left(य-\frac{२}{स}\right)}{१\times२\times३}+\ldots$$

$$=\left[१+१+\frac{१\left(१-\frac{१}{स}\right)}{१\times२}+\frac{१\left(१-\frac{१}{स}\right)\left(१-\frac{२}{स}\right)}{१\times२\times३} + \ldots\ldots\ldots\right]^{य}$$

अतएव (१) के दक्षिण पक्ष की श्रेढी (२) के दक्षिण पक्ष की श्रेढी का $य^{वाँ}$ घात है। स चाहे कितना ही बड़ा क्यों न हो, यह समता सदैव सत्य रहेगी।

अतः स जैसे जैसे बढ़ता है वैसे वैसे $\frac{१}{स}, \frac{२}{स}, \ldots\ldots$ का ह्रसन होता है और जसे स $\rightarrow \infty$ $\frac{१}{स}, \frac{२}{स}, \ldots\ldots$ सब शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं। अतः सीमा में

$$\text{१} + \text{य} + \frac{\text{य}^{\text{२}}}{\underline{|\text{२}}} + \frac{\text{य}^{\text{३}}}{\underline{|\text{३}}} + \ldots\ldots$$

$$= \left[\text{१} + \text{१} + \frac{\text{१}}{\underline{|\text{२}}} + \frac{\text{१}}{\underline{|\text{३}}} \quad + \ldots\ldots\right]^{\text{य}} \quad (\text{आ})$$

यह सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$\text{१} + \text{१} + \frac{\text{१}}{\underline{|\text{२}}} + \frac{\text{१}}{\underline{|\text{३}}} + \ldots\ldots\ldots$ इस श्रेढी का अभिधान सदैव घा से किया जाता है।

अतः (आ) इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\text{घा}^{\text{य}} = \text{१} + \text{य} + \frac{\text{य}^{\text{२}}}{\underline{|\text{२}}} + \frac{\text{य}^{\text{३}}}{\underline{|\text{३}}} + \ldots\ldots\ldots$$

अब यदि $\text{य} = \text{ग}\,\text{र}$ मान लिया जाय तो इस फल को

$\text{घा}^{\text{गर}} = \text{१} + \text{गर} + \frac{\text{ग}^{\text{२}}\text{र}^{\text{२}}}{\underline{|\text{२}}} + \frac{\text{ग}^{\text{३}}\text{र}^{\text{३}}}{\underline{|\text{३}}} +$ इस प्रकार लिख सकते हैं।

अब $\text{घा}^{\text{ग}} = \text{फ}$ रखने पर

$\text{ग} = \text{छे}_{\text{घा}}\text{फ}$ और $\text{घा}^{\text{गर}} = \text{फ}^{\text{र}}$

$$\therefore \text{फ}^{\text{र}} = \text{१} + \text{र}\,\text{छे}_{\text{घा}}\text{फ} + \text{र}^{\text{२}}\frac{[\text{छे}_{\text{घा}}\text{फ}]^{\text{२}}}{\text{२}\,!} + \frac{\text{र}^{\text{३}}[\text{छे}_{\text{घा}}\text{फ}]^{\text{३}}}{\text{३}\,!} + \ldots\ldots$$

इस श्रेढी को घातांक श्रढी कहते हैं।

उपप्रमेय १ — $\left(\; + \frac{\text{१}}{\text{स}}\right)^{\text{स}}$ इस पद संहति की सीमा,

स के अनन्ती की ओर प्रवृत्त होने पर 'घा' होती है।

$$\text{अतः} \lim_{स \to \infty} \left(१ + \frac{१}{स}\right)^{स} = \text{घा}$$

उपप्रमेय २— $\left(१ + \frac{य}{स}\right)^{स}$ इस पदसंहति की अर्हा स के अनन्ती की ओर प्रवृत्त होने पर $\left[१ + य + \frac{य^२}{\lfloor२} + \frac{य^३}{\lfloor३} + \ldots\right]$ इस श्रेढी के समान होती है।

अब, द्विपद प्रमेय के अनुसार

$$\left[१ + \frac{य}{स}\right]^{स} = १ + स \times \frac{य}{स} + \frac{स(स-१)}{\lfloor२}\left(\frac{य}{स}\right)^२ + \frac{स(स-१)(स-२)}{\lfloor३}\left(\frac{य}{स}\right)^३ + \ldots\ldots$$

$$= १ + य + \frac{१\left(१ - \frac{१}{स}\right)}{\lfloor२}य^२ + \frac{१\left(१-\frac{१}{स}\right)\left(१-\frac{२}{स}\right)}{\lfloor३}य^३ +$$

• अब जैसे $स \to \infty$, $\frac{१}{स}$, $\frac{२}{स}$, $\frac{३}{स}$, ... शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं।

$$\text{अतः सी}_{स \to \infty} \left(१ + \frac{य}{स}\right)^{स} = १ + य + \frac{य^२}{\lfloor२} + \frac{य^३}{\lfloor३} + \ldots\ldots$$

$$\text{एव घा}^{य} = १ + य + \frac{य^२}{\lfloor२} + \frac{य^३}{\lfloor३} + \ldots\ldots$$

$$\therefore \text{सी}_{\text{स}\to\infty} \left(१+\frac{\text{य}}{\text{स}}\right)^{\text{स}} = \text{घा}^{\text{य}}$$

यह ध्यान में रखना चाहिए कि ऊपर के विस्तारों में य और र की अर्हाओं पर कोई प्रतिबंध नहीं लगाया गया है। क्योंकि स की महती अर्हाओं का विचार किया गया है इसलिए $\frac{१}{\text{स}}$ सदव १ से न्यून ही रहेगा।

अतः जब ल की अर्हा संख्यात्मक दृष्टि से १ से छोटी हो। अर्थात् जब $-१<\text{ल}<१$, तब 'त' की सब अर्हाओं के लिये $(१+\text{ल})^{\text{त}}$ इस पदसहृति का द्विपद प्रमेय द्वारा श्रेढी के रूप में विस्तार किया जा सकता है। गत अनुच्छेद में प्रयोग किए गए द्विपद विस्तार इस प्रतिबन्ध का पालन करते हैं।

अतः य और र की सब अर्हाओं के लिए—

$$\text{क}^{\text{र}} = १ + \text{र छेघाक} + \frac{\text{र}^२ \times (\text{छेघाक})^२}{\underline{|२}} + \frac{\text{र}^३ \times (\text{छेघाक})^३}{\underline{|३}} + \ldots$$

$$\text{तथा घा}^{\text{य}} = १ + \text{य} + \frac{\text{य}^२}{\underline{|२}} + \frac{\text{य}^३}{\underline{|३}} + \ldots\ldots$$

$\text{घा}^{\text{य}}$ के विस्तार में

(१) य का $-$य में परिवर्तन करने से और (२) य $=-१$ रखने से निम्न-लिखित फल प्राप्त होते हैं।

$$\text{घा}^{-\text{य}} = १ - \text{य} + \frac{\text{य}^२}{\underline{|२}} - \frac{\text{य}^३}{\underline{|३}} + \ldots\ldots$$

$घा^{१} = १ - १ + \frac{१}{\underline{|२}} - \frac{१}{\underline{|३}} + \ldots\ldots$

१४.३१ $१ + १ + \frac{१}{\underline{|२}} + \frac{१}{\underline{|३}} + \ldots\ldots$ यह श्रेढी जिस का अभिधान घा से किया गया है महत्त्वपूर्ण है क्योंकि छेदार्थों का परिगणन प्रथम इसी श्रेढी को आधार मान कर किया गया है। घा आधार वाली छेदाएं प्राकृतिक छेदाएं कहलाती हैं।

१९.४ कुछ साधित प्रश्न—

उदाहरण१— $\left[\frac{१ - २य + ३य^{२}}{क^{य}}\right]$ इस पदसंहति के विस्तार में $य^{न}$ का गुणक निकालो।

$$\frac{१ - २य + ३य^{२}}{क^{य}}$$

$$= [१ - २य + ३य^{२}]क^{-य}$$

$$= [१ - २य + ३य^{२}]\Big[१ - य\,छे_{घा}क + \frac{य^{२}}{\underline{|२}}(छे_{घा}क)^{२} - \frac{य^{३}}{\underline{|३}}(छे_{घा}क)^{३} + \ldots + \frac{(-)^{न}य^{न}}{\underline{|न}}(छे_{घा}क)^{न} + \ldots\ldots\Big]$$

∴ अपेक्षित गुणक

$$=\frac{(-१)^{न}(\text{छेधाक})^{न}}{\underline{|न}}-\frac{२(-१)^{न-१}(\text{छेधाक})^{न-१}}{\underline{|न-१}}+\frac{३(-१)^{न-१}(\text{छेधाक})^{न-२}}{\underline{|न-२}}$$

$$=\frac{(-१)^{न}(\text{छेधाक})^{न-२}}{\underline{|न-१}}\left[\frac{(\text{छेधाक})^{२}}{न(न-१)}+२\frac{\text{छेधाक}}{न-१}+३\right]$$

उदाहरण २— $१+\frac{२^{२}}{\underline{|२}}+\frac{३^{२}}{\underline{|३}}+\frac{४^{२}}{\underline{|४}}+\ldots$ ... इस श्रेढी का अनन्ती तक योग निकालो।

दत्त श्रेढी का स$^{वा}$ पद $\frac{स^{२}}{\underline{|स}}$ है।

$$\text{अतः } प_{स}=\frac{स^{२}}{\underline{|स}}$$

$$=\frac{स}{\underline{|स-१}}$$

$$=\frac{स-१+१}{\underline{|स-१}}$$

$$=\frac{१}{\underline{|स-२}}+\frac{१}{\underline{|स-१}}$$

अब इस सम्बन्ध में स को २ और २ से आगे की अर्हाएं दो।

$$\therefore प_२ = \frac{१}{\underline{|०}} + \frac{१}{\underline{|१}}$$

$$प_३ = \frac{१}{\underline{|१}} + \frac{१}{\underline{|२}}$$

$$प_४ = \frac{१}{\underline{|२}} + \frac{१}{\underline{|३}}$$

....

....

$$प_२ + प_३ + प_४ + \ldots\ldots = \left[\frac{१}{\underline{|०}} + \frac{१}{\underline{|१}} + \frac{१}{\underline{|२}} + \frac{१}{\underline{|३}} + \ldots\ldots\right] + \left[\frac{१}{\underline{|१}} + \frac{१}{\underline{|२}} + \frac{१}{\underline{|३}} + \ldots\right]$$

किन्तु $घा = १ + १ + \frac{१}{\underline{|२}} + \frac{१}{\underline{|३}} + \ldots\ldots$

$$\therefore प_२ + प_३ + प_४ + \ldots\ldots = घा + घा - १$$

वाम पक्ष के योग में $प_१$ छोड़ दिया गया है । अतः उसको यहाँ दक्षिण पक्ष में जोड़ने से

$$प_१ + प_२ + प_३ + प_४ + \ldots\ldots = १ + घा + घा - १ = २घा$$

अतः $१ + \frac{२^२}{\underline{|२}} + \frac{३^२}{\underline{|३}} + \ldots\ldots$ इस श्रेढी का अनन्ती तक योग २घा के सम है ।

टिप्पणी—

$$प_स = \frac{१}{|स-२} + \frac{१}{|स-१}$$ में स = १ नहीं रखा जा सकता

क्योंकि इससे $\frac{१}{|-१}$ मिलता है और $|-१$ का अर्थ नहीं

दिया गया है।

१४.५ छेथ(१+य) का य के आरोही घातों में विस्तार करना—

घातांक विस्तार से यह ज्ञात है कि

$$क^र = १ + र छेघा क + \frac{र^२ (छेघा क)^२}{|२}$$

$$+ \frac{र^३ (छेघा क)^३}{|३} + \ldots\ldots (१)$$

यदि इसमें क = १ + य हो तो

$$(१+य)^र = १ + र छेथ(१+य) + \frac{र^२ [छेथ(१+य)]^२}{|२}$$

$$+ \frac{र^३ [छेथ (१+य)]^३}{|३} + \ldots\ldots\ldots (२)$$

यह प्राप्त होता है।

किन्तु र की सब अर्घाओं के लिए और $-१ < य < १$ के लिए द्विपद प्रमेय से यह विस्तार प्राप्त होता है।

$$(१+य)^र = १ + रय + \frac{र(र-१)}{\lfloor 2} य^२ + \frac{र(र-१)(र-२)}{\lfloor 3} य^३ + \dots\dots \quad (३)$$

अब (२) और (३) के दक्षिण पक्ष सर्वांग सम हैं।

$$\therefore १ + रय + \frac{र(र-१)य^२}{\lfloor 2} + \frac{र(र-१)(र-२)य^३}{\lfloor 3} + \dots$$

$$= १ + र \text{ छेघा}(१+य) + \frac{र^२ \text{छेघा}(१+य)^२}{\lfloor 2} + \frac{र^३ [\text{छेघा}(१+य)]^३}{\lfloor 3} + \dots\dots (४)$$

(४) के दक्षिण पक्ष में र का गुणक छेघा (१+य) है और वाम पक्ष में

$$य + \frac{(-१)य^२}{\lfloor 2} + \frac{(-१)(-२)य^३}{\lfloor 3} + \frac{(-१)(-२)(-३)य^४}{\lfloor 4} + \dots\dots\dots$$

अर्थात् $य - \frac{य^२}{२} + \frac{य^३}{३} - \frac{य^४}{४} + \dots\dots\dots$ यह है।

इन गुणकों के समीकरण से

$$छेधा\ (१+य)=य-\frac{य^२}{२}+\frac{य^३}{३}-\frac{य^४}{४}+\dots\dots\dots$$

[जहां $-१<य<१$

यह श्रेढी छेदा श्रेढी कहलाती है।

१४.५१ $छेधा(१+य)=य-\frac{य^२}{२}+\frac{य^३}{३}-\frac{य^४}{४}+\dots\dots$

में य का $(-य)$ में परिवर्तन करने से

$$छेधा\ (१-य) = -य-\frac{य^२}{२}-\frac{य^३}{३}-\frac{य^४}{४}-\dots\dots\dots$$

प्राप्त होता है। [$-१<य<१$]

१४.६ किसी संख्या की छेदा का परिगणन—

अनुच्छेद १४.५ और १४.५१ के अनुसार यदि $-१<य<१$

हो तो $छे\ (१+य) = य-\frac{य^२}{२}+\frac{य^३}{३}-\frac{य^४}{४}+\dots\dots\dots(१)$

और $छे\ (१-य) = -य-\frac{य^२}{२}-\frac{य^३}{३}-\frac{य^४}{४}-\dots\dots(२)$

(१) में से (२) को घटाने पर

$$छे\left(\frac{१+य}{१-य}\right)=२\left[य+\frac{य^३}{३}+\frac{य^५}{५}+\dots\right]\ \dots\dots\dots(३)$$

अब $\frac{१+य}{१-य}=\frac{ठ}{ट}$ रखो।

$\therefore$ $य = \frac{ठ-ट}{ठ+ट}$

$$\therefore \text{छे} \frac{ठ}{ट} = २ \left[\frac{ठ-ट}{ठ+ट} + \frac{१}{३}\left(\frac{ठ-ट}{ठ+ट}\right)^{३} + \frac{१}{५}\left(\frac{ठ-ट}{ठ+ट}\right)^{५} + \ldots\ldots\right]$$

मान लो $ठ = ट + १$

$$\therefore \text{छे} \frac{ट+१}{ट} = २\left[\frac{१}{२ट+१} + \frac{१}{३}\left(\frac{१}{२ट+१}\right)^{३} + \frac{१}{५}\left(\frac{१}{२ट+१}\right)^{५} + \ldots\ldots\right]$$

अब मान लो $ट = १, २, ३, \ldots\ldots\ldots$

$$\therefore \text{छे} २ = २\left[\frac{१}{३} + \frac{१}{३} \times \frac{१}{३^{३}} + \frac{१}{५ \times ३^{५}} + \ldots\ldots\right] \quad \ldots(४)$$

$$\text{छे} \frac{३}{२} = २\left[\frac{१}{५} + \frac{१}{३} \times \frac{१}{५^{३}} + \frac{१}{५ \times ५^{५}} + \ldots\ldots\right] \quad (५)$$

....

(४) के दक्षिण पक्ष के पदों का योग करने से छे २ की अर्हा प्राप्त होती है।

$\therefore$ छे २ = ·६९३१४७

(४) से छे २ की अर्हा प्राप्त करने पर इसी विधा से छे ३ − छे २ = ·४०५४६५ प्राप्त होता है [(५) से

$\therefore$ छे ३ = ·४०५४६५ + ·६९३१४७

= १·०९८६१२

इस प्रकार से या आधार पर किसी भी राशि की छेदा परिशुद्धता के अपेक्षित अंश तक निकाली जा सकती है।

१४.७ उदाहरण १—

छे (१ – ५य + ६य²) का 'य' के आरोही घातों में विस्तार करो, और सामान्य पद निकालो।

$$१ - ५य + ६य^२ = (१ - ३य)\ (१ - २य)$$

$$\therefore \text{छे}\ (१ - ५य + ६य^२) = \text{छे}(१ - ३य) + \text{छे}\ (१ - २य)$$

$$\text{अब छे}\ (१ - ३य) = -\left[३य + \frac{(३य)^२}{२} + \frac{(३य)^२}{३} + \ldots\ldots\right]$$

$$\text{और छे}\ (१ - २य) = -\left[२य + \frac{(२य)^२}{२} + \frac{(२य)^३}{३} + \ldots\ldots\right]$$

$$\therefore \text{छे}\ (१ - ५य + ६य^२) = -\left[३य + \frac{(३य)^२}{२} + \frac{(३य)^३}{३} + \ldots\right]$$

$$-\left[२य + \frac{(२य)^२}{२} + \frac{(२य)^२}{३} + \ldots\ldots\right]$$

$$\text{अब सामान्य पद}\ प_न = -\frac{(३य)^न}{न} - \frac{(२य)^न}{न}$$

$$= -\frac{य^न}{न}\ (३^न + २^न)$$

अब न को १, २, ३.........ये अर्हाएं देने पर क्रमशः पहला, दूसरा, तीसरा............पद प्राप्त होता है।

$$\therefore \text{छे}\,(१ - ५य + ६य^२) = -\frac{य}{१}\,(५) - \frac{य^२}{२}\,(१३)$$

$$-\frac{य^३}{३}\,(३५)\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

उदाहरण २— य के आरोही घातों में छे (१−य+य² का विस्तार करो।

$$\text{अब}\ १ - य + य^२ = \frac{(१ - य + य^२)\ (१ + य)}{१ + य}$$

$$= \frac{१ + य^३}{१ + य}$$

$$\therefore \text{छे}(१ - य + य^२) = \text{छे}\ \frac{१ + य^३}{१ + य}$$

$$= \text{छे}(१ + य^३) - \text{छे}(१ + य)$$

$$= \left[य^३ - \frac{य^६}{२} + \frac{य^९}{३} - \frac{य^{१२}}{४} + \ldots \right]$$

$$- \left[य - \frac{य^२}{२} + \frac{य^३}{३} - \frac{य^४}{४} + \ldots \right]$$

$$= -य + \frac{य^२}{२} + २\frac{य^३}{३} + \frac{य^४}{४} - \frac{य^५}{५} \ldots$$

उदाहरण ३— यदि य² − तय + थ = ० के मूल अ और आ हों तो दिखाओ कि

$$\text{छे}\,(१ + तय + थय^२) = \frac{(अ + आ)}{१}\,य - \frac{अ^२ + आ^२}{२}\,य^२$$

$$+\frac{\text{अ}^3+\text{आ}^3}{३}\text{य}^3-\ldots\ldots$$

क्योंकि अ और आ, $\text{य}^२-\text{तय}+\text{थ}=०$ के मूल हैं।

इसलिए $\text{अ}+\text{आ}=\text{त}$

$$\text{अ}\times\text{आ}=\text{थ}$$

$$\therefore\ (१+\text{तय}+\text{थय}^२)=१+(\text{अ}+\text{आ})\,\text{य}+\text{अ}\times\text{आ}\times\text{य}^२$$

$$=(१+\text{अय})\ (१+\text{आ}\times\text{य})$$

$$\therefore\ \text{छे}\,(१+\text{तय}+\text{थय}^२)$$

$$=\text{छे}\left[(१+\text{अय})\ (१+\text{आय})\right]$$

$$=\text{छे}\,(१+\text{अय})+\text{छे}\,(१+\text{आय})$$

$$=\left[\text{अय}-\frac{\text{अ}^२\text{य}^२}{२}+\frac{\text{अ}^३\text{य}^३}{३}-\right]$$

$$+\left[\text{आ}\times\text{य}-\frac{\text{आ}^२\text{य}^२}{२}+\frac{\text{आ}^३\text{य}}{३}+\ldots\ldots\right]$$

$$=(\text{अ}+\text{आ})\,\text{य}-\frac{\text{अ}^२+\text{आ}^२}{२}\text{य}^२$$

$$+\frac{\text{अ}^३+\text{आ}^३}{३}\text{य}^३-\ldots\ldots$$

१४.८ घा की असंमेयता (incommensurability) का

उपपादन— यह सिद्ध किया जायगा कि घा, न तो पूर्णांक है और न भिन्न।

(अ) अब $घा = १ + १ + \frac{१}{\lfloor २} + \frac{१}{\lfloor ३} + \ldots\ldots \infty \ldots$ (१)

(१) से यह स्पष्ट है कि घा २ से बड़ा है।

पुनः $घा < १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२^२} + \frac{१}{२^३} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ (२)

क्योंकि पहले तीन समान पदों के बाद (१) और (२) के दक्षिण पक्ष में (२) का प्रत्येक पद (१) के संवादी पद से बड़ा है।

$$\therefore घा < १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२^२} + \ldots\ldots \infty$$

$$< १ + \frac{१}{१ - \frac{१}{२}}$$

$$< १ + २$$

$\therefore घा < ३$

अतः $२ < घा < ३$

इसलिए घा पूर्णांक नहीं है किन्तु उस की महा २ और ३ के बीच है।

(आ) मान लो घा, भिन्न $\frac{ठ}{ट}$ के सम है जहां ट और ठ घन-पूर्णांक है।

$$\therefore \frac{\text{ठ}}{\text{ट}} = १ + १ + \frac{१}{\underline{|२}} + \ldots \frac{१}{\underline{|\text{ट}}} + \frac{१}{\underline{|\text{ट}+१}} + \frac{१}{\underline{|\text{ट}+२}} + \ldots$$

दोनों पक्षों का $\underline{|\text{ट}}$ से गुणन करने पर।

$$\text{ठ}\,\underline{|\text{ट}-१} = \underline{|\text{ट}} + \underline{|\text{ट}} + \frac{\underline{|\text{ट}}}{\underline{|२}} + \ldots\ldots + १ + \frac{१}{\text{ट}+१}$$

$$+ \frac{१}{(\text{ट}+१)(\text{ट}+२)} + \ldots\ldots$$

क्योंकि $\underline{|\text{ट}}$ प्रथम ट प्राकृतिक संख्याओं के गुणनफल का प्रतिनिधान करता है इसलिए, ठ $\underline{|\text{ट}-१}$, $\underline{|\text{ट}}$, $\underline{|\text{ट}-१}$,...... सब धन पूर्णांक हैं।

$$\therefore \text{ठ}\,\underline{|\text{ट}-१} = \text{पूर्णांक} + \frac{१}{(\text{ट}+१)}$$

$$+ \frac{१}{(\text{ट}+१)(\text{ट}+२)} + \ldots$$

किन्तु $\frac{१}{\text{ट}+१} + \frac{१}{(\text{ट}+१)(\text{ट}+२)} + \ldots$ यह लघ्वंश भिन्न है, क्योंकि स्पष्टतः यह प्रथम पद से बड़ा है और

$$\frac{१}{\text{ट}+१} + \frac{१}{(\text{ट}+१)^२} + \frac{१}{(\text{ट}+१)^३} + \ldots\infty$$ इस गुणोत्तर

श्रेढी के योग से अर्थात् $\frac{१}{\text{ट}}$ से छोटा है। किन्तु वाम पक्ष पूर्णांक है।

$\therefore$ पूर्णांक = पूर्णांक + लघ्वंश भिन्न
किन्तु यह असंगत है।

अतः यह कल्पना कि घा भिन्न $\frac{ट}{ठ}$ के सम है, भ्रान्त है। इसलिए घा भिन्न नहीं है।

केवल पूर्णांक और भिन्न संमेय होते हैं। घा इनमें से किसी के भी सम नहीं है इसलिए घा असंमेय है।

प्रश्नावलि २०

(१) $य^४$ तक $\frac{१}{य}$ [$१ - घा^{-य}$] का य के आरोही घातों में विस्तार करो। [बनारस १९३०

(२) $य^४$ तक $घा^{घा^{य}}$ का य के आरोही घातों मे विस्तार करो।

(३) $\frac{१}{२श}$ [$घा^{शय} - घा^{-शय}$] का य के आरोही घातों में विस्तार करो जहां $श = \sqrt{-१}$

(४) दिखाओ कि $\frac{क + खय}{\underline{|१}} + \frac{(क+खय)^२}{\underline{|२}}$

$$+\frac{(क+खय)^{३}}{\lfloor ३}+\ldots\ldots$$

इस अनन्त श्रेढी में $य^{स}$ का गुणक $\frac{ख^{स}}{\lfloor स}घा^{क}$ है।

[नागपुर १९३४

(५) $\frac{१-२य+३य^{२}}{घा^{य}}$ के विस्तार में $य^{न}$ का गुणक निकालो।

(६) $१+\frac{१+क}{\lfloor २}+\frac{१+क+क^{२}}{\lfloor ३}+\frac{१+क+क^{२}+क^{३}}{\lfloor ४}+$

……… अनन्ती तक इस श्रेढी की अर्हा निकालो।

[कलकत्ता १८८८

(७) दिखाओ कि $घा^{-१}=२\left[\frac{१}{\lfloor ३}+\frac{२}{\lfloor ५}+\frac{३}{\lfloor ७}+\ldots\ldots\infty\right]$

(८) दिखाओ कि $\frac{घा-१}{घा+१}=\dfrac{\frac{१}{२}+\frac{१}{\lfloor ४}+\frac{१}{\lfloor ६}+\ldots\ldots\ldots}{\frac{१}{\lfloor १}+\frac{१}{\lfloor ३}+\frac{१}{\lfloor ५}+\ldots\ldots\ldots}$

[कलकत्ता १९३४

(९) $\left[१ + \frac{१}{|२} + \frac{१}{|३} + \ldots\right]\left[१ - \frac{१}{|२} + \frac{१}{|३} - \ldots\right]$

को घा के पदों में व्यक्त करो। [कलकत्ता १९३८

(१०) इन श्रेढियों का अनन्ती तक योग निकालो—

(अ) $१ + \frac{१+२}{|२} + \frac{१+२+२^{२}}{|३} + \ldots\ldots$

(आ) $१ + \frac{१+२}{|२} + \frac{१+२+३}{|३} + \frac{१+२+३+४}{|४} + \ldots$

(इ) $\frac{२}{|१} + \frac{४}{|३} + \frac{६}{|५} + \frac{८}{|७} + \ldots$ [कलकत्ता १८८७

(ई) $१ + \frac{२^{२}}{|१} + \frac{३^{२}}{|२} + \frac{४^{२}}{|३} + \ldots$ [इलाहाबाद १९२८

(उ) $१ + \frac{३}{|१} + \frac{५}{|२} + \frac{७}{|३} + \frac{९}{|४} + \ldots\ldots$

(ऊ) $\frac{२^{३}}{|१} + \frac{३^{३}}{|२} + \frac{४^{३}}{|३} + \ldots\ldots$

(११) छे $(१+३य+२य^{२})$ का य के आरोही घातों में विस्तार करो।

(१२) छे $[य^{२} + (क+ख)य + कख] - २$ छेय का य के अवरोही घातों में विस्तार करो।

(१३) दिखाओ कि

$$२\left[\frac{१}{२स^२-१}+\frac{१}{३}\cdot\frac{१}{(२स^२-१)^३}+\frac{१}{५(२स^२-१)^५}+\dots\infty\right]$$

$$=छे\ \frac{स^२}{स^२-१}$$ [मद्रास १९४०

(१४) दिखाओ कि

$$छे\ ठ=२\left\{\frac{ठ-१}{ठ+१}+\frac{१}{३}\left[\frac{ठ-१}{ठ+१}\right]^३+\frac{१}{५}\left[\frac{ठ-१}{ठ+१}\right]^५+\dots\infty\right\}$$

[कलकत्ता १९३२

(१५) दिखाओ कि

$$\frac{१}{स+१}+\frac{१}{२(स+१)^२}+\frac{१}{३(स+१)^३}+\dots$$

$$=\frac{१}{स}-\frac{१}{२स^२}+\frac{१}{३स^३}+\dots$$ [कलकत्ता १९१४

(१६) इन श्रेढियों का अनन्तों तक योग निकालो—

(अ) $\frac{१}{२\times३}+\frac{१}{४\times५}+\frac{१}{६\times७}+\dots$ [कलकत्ता १९१३

(आ) $\frac{१}{१\times२}-\frac{१}{२\times३}+\frac{१}{३\times४}-\frac{१}{४\times५}$

(इ) $\frac{१}{१\times२\times३}+\frac{१}{३\times४\times५}+\frac{१}{५\times६\times७}+\dots$

(ई) $\frac{१}{५} - \frac{१}{२\times ५^२} + \frac{१}{३\times ५^३} + \ldots\ldots$

(१७) यदि $र = य - \frac{य^२}{२} + \frac{य^३}{३} - \frac{य^४}{४} + \ldots\ldots$ हो तो य को र के पदों में व्यक्त करो।

(१८) सिद्ध करो कि

छेघा११ = २ छेघा ७ − छेघा३

$$+\left[\left(\frac{४}{७}\right)^२ + \frac{१}{२}\left(\frac{४}{७}\right)^४ + \frac{१}{३}\left(\frac{४}{७}\right)^६ + \ldots\right]$$

[इलाहाबाद १९१८

(१९) सिद्ध करो कि

$$छे\ ७ = १ - \frac{१}{२}\ छे\ २ - ठ\left[\frac{१}{९९} + \frac{१}{३(९९)^३} + \ldots\ldots\right]$$

जबकि छेदाएं १० को आधार मान कर ली गई हैं और आधार १० पर घा की छेदा ठ है।

यदि छे २ = ·३०१०३ और ठ = ·४३४२९४ तो छे ७ की अहां ६ दशमिक स्थानों तक निकालो।

पन्द्रहवां अध्याय

निश्चायक

(determinants)

१५.१ $क_1 य + ख_1 र = ०$

और $क_2 य + ख_2 र = ०$

इन दो समीकारों से यदि य और र का निरसन (elimination) किया जाय तो $क_1 ख_2 - क_2 ख_1 = ०$ ....(१) निरसन फल प्राप्त होगा ।

इसी प्रकार तीन युगपत्-समीकारों से

$$क_1 य + ख_1 र + ग_1 ल = ०$$

$$क_2 य + ख_2 र + ग_2 ल = ०$$

$$क_3 य + ख_3 र + ग_3 ल = ०$$

य, र, और ल का निरसन करने पर

$$क_1 (ख_2 ग_3 - ख_3 ग_2) + ख_1 (ग_2 क_3 - ग_3 क_2) + ग_1 (क_2 ख_3 - क_3 ख_2) = ० \quad ....(२)$$

यह निरसन फल प्राप्त होगा ।

(१) और (२) के वाम पक्ष क्रमशः $\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 \\ क_2 & ख_2 \end{vmatrix}$

और $\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ इन रूपों में लिखे जाते हैं।

उपर्युक्त फलों को इस विशेष रूप में लिखने की पद्धति को निश्चायक (determinants) के रूप में व्यक्त करना कहते हैं।

$क_1, ख_1, ग_1, क_2, ख_2, ग_2, \ldots\ldots$ ये अक्षर निश्चायक के संघटक (constituents) कहलाते हैं।

$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ इस निश्चायक में $क_1, ख_1, ग_1; क_2, ख_2, ग_2;$

...... आदि संघटकों को धारण करनेवाली क्षैतिज रेखाएं (horizontal lines) पंक्तियां (rows) कहलाती हैं और $क_1, क_2, क_3; ख_1, ख_2, ख_3, \ldots\ldots$ आदि को धारण करने वाली उदग्र रेखाएं स्तम्भ (column) कहलाती हैं। इस निश्चायक में तीन पंक्तियां और तीन स्तम्भ हैं।

इसी प्रकार $\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 \\ क_2 & ख_2 \end{vmatrix}$ इस निश्चायक में दो पंक्तियां और दो स्तम्भ हैं।

अतः यह स्पष्ट है कि किसी भी निश्चायक में पंक्तियों

की संख्या और स्तम्भों की संख्या समान होती है। यह संख्या निश्चायक का वर्ण (order) नियत करती है।

अतः द्वितीय वर्ण के निश्चायक में दो पंक्तियां और दो स्तम्भ और चार संघटक रहते हैं।

तृतीय वर्ण के निश्चायक में तीन पंक्तियां, तीन स्तम्भ और ९ संघटक रहते हैं। सामान्यतः सवें वर्ण के निश्चायक में स पंक्तियां, स स्तम्भ और $स^2$ संघटक रहते हैं।

सवें वर्ण के निश्चायक का प्रमाप रूप (standard form)

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 & \cdots & प_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 & \cdots & प_2 \\ क_3 & ख_3 & \cdots & \cdots & प_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ क_स & ख_स & ग_स & \cdots & प_स \end{vmatrix}$$ इस प्रकार लिया जायगा।

संघटक $क_1$ को अग्र संघटक (leading constituent) और $क_1, ख_2, ग_3, \ldots\ldots प_स$ इन संघटकों को धारण करने वाला विकर्ण अग्र विकर्ण कहलाता है।

कभी कभी $(क_1 ख_2 ग_3 \ldots\ldots प_स)$ सवें वर्ण के निश्चायक का प्रतिनिधान करने के लिए प्रयुक्त किया जाता है।

१५.२ निश्चायकों का विस्तार— अनुच्छेद १५.१ में यह कहा गया है कि $\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 \\ क_2 & ख_2 \end{vmatrix}$ का विस्तार

$$(क_1 ख_2 - ख_1 क_2) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

हैं और $\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ का विस्तार यह है—

$$क_1(ख_2ग_3 - ख_3ग_2) - ख_1(क_2ग_3 - क_3ग_2) + ग_1(क_2ख_3 - क_3ख_2) \quad \ldots\ldots(२)$$

अथवा $$क_1(ख_2ग_3 - ग_2ख_3) - क_2(ख_1ग_3 - ग_1ख_3) + क_3(ख_1ग_2 - ग_1ख_2) \quad \ldots\ldots(३)$$

इनसे द्वितीय और तृतीय वर्ण के निश्चायकों के विस्तार के लिए ये नियम दिए जा सकते हैं।

(१) द्वितीय वर्ण के निश्चायक में अग्र संघटक को विकर्णतः सम्मुख संघटक से गुणा करो और उस गुणनफल में प्रथम स्तम्भ के दूसरे संघटक और विकर्णतः सम्मुख संघटक का गुणनफल ऋण चिह्न देकर जोड़ो।

(२) $$क_1(ख_2ग_3 - ख_3ग_2) - ख_1(क_2ग_3 - क_3ग_2) + ग_1(क_2ख_3 - क_3ख_2)$$

अथवा $$क_1(ख_2ग_3 - ख_3ग_2) - क_2(ख_1ग_3 - ख_3ग_1) + क_3(ख_1ग_2 - ख_2ग_1)$$

यह पदसंहति $\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ इस निश्चायक का विस्तार है।

उपर्युक्त पदसंहतियां इस प्रकार लिखी जा सकती हैं।

$$क_1\begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} - ख_1\begin{vmatrix} क_2 & ग_2 \\ क_3 & ग_3 \end{vmatrix} + ग_1\begin{vmatrix} क_2 & ख_2 \\ क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

अथवा

$$\text{क}_1 \begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} - \text{क}_2 \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \text{क}_3 \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \end{vmatrix}$$

पहिले प्रकार में निश्चायक का विस्तार प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों में है और दूसरे प्रकार में वह प्रथम स्तम्भ के संघटकों के पदों में है।

प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों में नीचे दी हुई रीति से विस्तार किया जाता है। यही रीति दूसरे प्रकार के लिए भी समानतः उपयुक्त होगी।

क_1 का गुणक क_1 को धारण करनेवाली प्रथम पंक्ति और प्रथम स्तम्भ का अपमार्जन करने पर बचे हुए द्वितीय वर्ण के निश्चायक के सम है। अतः क_1 का गुणक $\begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$ है।

प्रथम पंक्ति के द्वितीय संघटक ख_1 के गुणक की संख्यात्मक अर्हा प्रथम पंक्ति और द्वितीय स्तम्भ का अपमार्जन करने पर बचे हुए द्वितीय वर्ण के निश्चायक के सम है।

अतः ख_1 के गुणक की संख्यात्मक अर्हा $\begin{vmatrix} \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$ है।

प्रथम पंक्ति के तीसरे संघटक ग_1 के गुणक की संख्यात्मक अर्हा प्रथम पंक्ति और तृतीय स्तम्भ का अपमार्जन करने पर बचे हुए द्वितीय वर्ण के निश्चायक के सम है। अतः ग_1 के गुणक की संख्यात्मक अर्हा $\begin{vmatrix} \text{क}_2 & \text{ख}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix}$ है।

किसी विशेष गुणक का चिह्न निश्चित करने के लिए यह नियम है। अग्र संघटक से विशेष संघटक की स्थिति पंक्ति पर अथवा स्तम्भ पर अथवा दोनों पर गिनो। उसकी संख्या अयुग्म अथवा युग्म होने के अनुसार धन अथवा ऋण चिह्न लो। विभिन्न पदों का उनके उपयुक्त चिह्नानुसार बीजीय योग करने से दत्त निश्चायक का विस्तार प्राप्त होता है।

उदाहरण— $\begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ ३ & १ & ७ \end{vmatrix}$ इस निश्चायक का विस्तार करो।

दत्त निश्चायक का प्रथम स्तम्भ के संघटकों के पदों में विस्तार करने पर

$$\begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ ३ & १ & ७ \end{vmatrix} = ७\begin{vmatrix} ४ & ७ \\ १ & ७ \end{vmatrix} - १\begin{vmatrix} २ & २० \\ १ & ७ \end{vmatrix} + ३\begin{vmatrix} २ & २० \\ ४ & ७ \end{vmatrix}$$

$$= ७(२८ - ७) - (१४ - २०) + ३(१४ - ८०)$$

$$= १४७ + ६ + ४२ - २४०$$

$$= -४५$$

१५.३ निश्चायकों के गुण [properties of determinants]— निश्चायकों के सर्व साधारण गुण ये हैं। इनका उपपादन तृतीय वर्ण के निश्चायक को लेकर किया जायगा।

तृतीय वर्ण के निश्चायक का प्रमाप रूप $\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ लिया जायगा।

(१) स्तम्भों का पंक्तियों में और पंक्तियों का स्तम्भों में परिवर्तन करने से निश्चायक की अर्हा अपरिवर्तित रहती है अर्थात्

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} क_1 & क_2 & क_3 \\ ख_1 & ख_2 & ख_3 \\ ग_1 & ग_2 & ग_3 \end{vmatrix}$$

दक्षिण पक्ष के निश्चायक का विस्तार प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों में करने पर

$$क_1(ख_2ग_3 - ग_2ख_3) - क_2(ख_1ग_3 - ग_1ख_3) + क_3(ख_1ग_2 - ग_1ख_2)$$

प्राप्त होता है। पदों का पुनर्विन्यास करने पर

$$क_1(ख_2ग_3 - ख_3ग_2) - ख_1(क_2ग_3 - क_3ग_2) + ग_1(क_2ख_3 - क_3ख_2)$$

अथवा $क_1 \begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} - ख_1 \begin{vmatrix} क_2 & ग_2 \\ क_3 & ग_3 \end{vmatrix} + ग_1 \begin{vmatrix} क_2 & ख_2 \\ क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$

अथवा $\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ प्राप्त होता है।

अतः स्तम्भों का पंक्तियों में अथवा पंक्तियों का स्तम्भों में परिवर्तन करने से निश्चायक अपरिवर्तित रहता है।

(२) दो अनुगामी स्तम्भों के अथवा पंक्तियों के व्यतिहरण (interchange) से निदचायक के चिह्न में परिवर्तन होता है

अर्थात् यह सिद्ध करना है कि

$$\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

निदचायकों का विस्तार प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों में करने पर

$$\text{वाम पक्ष} = \text{क}_1(\text{ख}_2\text{ग}_3 - \text{ख}_3\text{ग}_2) - \text{ख}_1(\text{क}_2\text{ग}_3 - \text{क}_3\text{ग}_2) + \text{ग}_1(\text{क}_2\text{ख}_3 - \text{क}_3\text{ख}_2)$$

और दक्षिण पक्ष

$$= -[\text{ख}_1(\text{क}_2\text{ग}_3 - \text{क}_3\text{ग}_2) - \text{क}_1(\text{ख}_2\text{ग}_3 - \text{ख}_3\text{ग}_2) + \text{ग}_1(\text{ख}_2\text{क}_3 - \text{ख}_3\text{क}_2)]$$

$$= -\text{ख}_1(\text{क}_2\text{ग}_3 - \text{क}_3\text{ग}_2) + \text{क}_1(\text{ख}_2\text{ग}_3 - \text{ख}_3\text{ग}_2) - \text{ग}_1(\text{ख}_2\text{क}_3 - \text{ख}_3\text{क}_2)$$

$$= \text{क}_1(\text{ख}_2\text{ग}_3 - \text{ख}_3\text{ग}_2) - \text{ख}_1(\text{क}_2\text{ग}_3 - \text{क}_3\text{ग}_2) + \text{ग}_1(\text{ख}_3\text{क}_2 - \text{क}_3\text{ख}_2)$$

अतः दक्षिण पक्ष वाम पक्ष के सम है।

(३) यदि किसी निदचायक की दो पंक्तियां अथवा दो स्तम्भ सर्वांगसम हों तो निदचायक लुप्त हो जाता है। (अर्थात् निदचायक की अर्हा शून्य के सम हो जाती है)

$$\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

इस निदचायक पर जिसमें दो

स्तम्भ सर्वांगसम हैं विचार करो।

यदि प्रथम और द्वितीय स्तम्भों का व्यतिहरण किया जाय तो निश्चायक के रूप में परिवर्तन नहीं होता। अतः उसकी अर्हा वही रहती है। किन्तु गुण (२) के अनुसार निश्चायक के चिह्न में परिवर्तन होता है।

$$\text{अतः} \quad \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{अर्थात्} \quad 2 \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{अथवा} \quad \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix} = 0$$

(४) यदि किसी निश्चायक में किसी स्तम्भ के अथवा किसी पंक्ति के प्रत्येक संघटक का प से गुणन किया जाय तो दत्त निश्चायक प से गुणित होता है।

$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ इस निश्चायक में प्रथम स्तम्भ के

प्रत्येक संघटक का प से गुणन करने पर

$$\text{निश्चायक} \begin{vmatrix} पक_1 & ख_1 & ग_1 \\ पक_2 & ख_2 & ग_2 \\ पक_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \text{ प्राप्त होता है।}$$

अब इस निदचायक का प्रथम स्तम्भ के संघटकों के पदों में विस्तार करने पर

$$\begin{vmatrix} \text{पक}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{पक}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{पक}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \text{पक}_1 \begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} - \text{पक}_2 \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_3 \\ \text{ख}_1 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \text{पक}_3 \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{ग}_1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{प}\left[\text{क}_1 \begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} - \text{क}_1 \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \text{क}_3 \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \text{प} \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

उपप्रमेय १— यदि किसी निदचायक में किसी स्तम्भ के अथवा किसी पंक्ति के संघटक क्रमशः दूसरे स्तम्भ के अथवा दूसरी पंक्ति के संघटक के प गुना हों तो निदचायक लुप्त होता है।

पहले गुण (४) का और फिर (३) का प्रयोग करने से यह स्पष्ट होगा।

उप प्रमेय २ — यदि किसी निदचायक में किसी स्तम्भ के अथवा किसी पंक्ति के सब संघटकों के चिह्न परिवर्तित किए जायं तो निदचायक का चिह्न परिवर्तित होता है क्योंकि यह दत्त निदचायक को −१ से गुणा करने के समान है।

(५) यदि किसी भी पंक्ति का अथवा किसी भी स्तम्भ का

प्रत्येक संघटक दो अथवा दो से अधिक राशियों का योग हो तो निश्चायक दो अथवा दो से अधिक निश्चायकों के योग से व्यक्त किया जा सकता है।

$$\begin{vmatrix} \text{क}_1+\text{अ}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2+\text{अ}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3+\text{अ}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$ इस निश्चायक पर विचार करो।

इसका प्रथम स्तम्भ क संघटकों के पदों में विस्तार करने पर निश्चायक

$$=(\text{क}_1+\text{अ}_1)\begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} -(\text{क}_2+\text{अ}_2)\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} +(\text{क}_3+\text{अ}_3)\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_2 \end{vmatrix}$$

$$=\text{क}_1\begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} -\text{क}_2\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} +\text{क}_3\begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \end{vmatrix}$$

$$+\text{अ}_1\begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} -\text{अ}_2\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} +\text{अ}_3\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

(६) यदि किसी निश्चायक में किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के संघटक क्रमशः विभिन्न अचलों से गुणित अन्य पंक्तियों अथवा स्तम्भों के संवादी संघटकों के बीजीय योग के सम हों तो निश्चायक शून्य के सम होता है।

$$\begin{vmatrix} \text{मख}_1+\text{नग}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{मख}_2+\text{नग}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{मख}_3+\text{नग}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$ इस निश्चायक पर विचार

करो। इसमें प्रथम स्तम्भ के संघटक अपेक्षित प्रतिबंध का पालन करते हैं।

यह निश्चायक

$$= \begin{vmatrix} \text{मख}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{मख}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{मख}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{नग}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{नग}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{नग}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} \quad (५) \text{ से}$$

$$= \text{म} \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \text{न} \begin{vmatrix} \text{ग}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ग}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ग}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} \quad (४) \text{ से}$$

$$= \text{शून्य} \quad + \quad \text{शून्य} \quad (३) \text{ से}$$

$$= 0$$

(७) यदि किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के संघटकों में, अन्य पंक्तियों अथवा स्तम्भों के संवादी संघटकों को अचल गुणकों से गुणा करने पर जोड़ा जाय तो निश्चायक की अर्हा अपरिवर्तित रहती है।

$$\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$ इस निश्चायक पर विचार करो।

प्रथम स्तम्भ के संघटकों में म -गुना द्वितीय स्तम्भ के संवादी संघटक और न -गुना तृतीय स्तम्भ के संवादी संघटक जोड़ने से यह निश्चायक प्राप्त होता है।

$$\begin{vmatrix} \text{क}_1 + \text{मख}_1 + \text{नग}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 + \text{मख}_2 + \text{नग}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 + \text{मख}_3 + \text{नग}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

यह निश्चायक तीन निश्चायकों के योग से व्यक्त किया जा सकता है। अतः यह निश्चायक

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + म\begin{vmatrix} ख_1 & ख_1 & ग_1 \\ ख_2 & ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + न\begin{vmatrix} ग_1 & ख_1 & ग_1 \\ ग_2 & ख_2 & ग_2 \\ ग_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$ के

सम है। अन्त के दो निश्चायक लुप्त हो जाते है। अतः निश्चायक की अर्हा अपरिवर्तित रहती है।

उदाहरण १— दिखाओ कि निश्चायक $\begin{vmatrix} ख+ग & क & १ \\ ग+क & ख & १ \\ क+ख & ग & १ \end{vmatrix}$

लुप्त होता है।

प्रथम स्तम्भ के संघटकों में द्वितीय स्तम्भ के संवादी संघटक जोड़ने से

$$निश्चायक = \begin{vmatrix} क+ख+ग & क & १ \\ क+ख+ग & ख & १ \\ क+ख+ग & ग & १ \end{vmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ के संघटकों में से समापवर्तक (क + ख + ग) निकाल देने से $(क+ख+ग)\begin{vmatrix} १ & क & १ \\ १ & ख & १ \\ १ & ग & १ \end{vmatrix}$ यह निश्चायक प्राप्त होता है।

इस निश्चायक में दो स्तम्भ सर्वांगसम होने से यह लुप्त होता है। इसलिए दत्त निश्चायक लुप्त होता है।

उदाहरण २— $\begin{vmatrix} खग & क & क^2 \\ गक & ख & ख^2 \\ कख & ग & ग^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ & क^2 & क^3 \\ १ & ख^2 & ख^3 \\ १ & ग^2 & ग^3 \end{vmatrix}$

इस ऐकात्म्य को सिद्ध करो।

वाम पक्ष के निश्चायक का नि से अभिधान करने पर

$$\text{नि} = \begin{vmatrix} \text{खग} & \text{क} & \text{क}^2 \\ \text{गक} & \text{ख} & \text{ख}^2 \\ \text{कख} & \text{ग} & \text{ग}^2 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति का क से द्वितीय का ख से और तृतीय का ग से गुणन करने पर

$$\text{कखग नि} = \begin{vmatrix} \text{कखग} & \text{क}^2 & \text{क}^3 \\ \text{कखग} & \text{ख}^2 & \text{ख}^3 \\ \text{कखग} & \text{ग}^2 & \text{ग}^3 \end{vmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ के संघटकों में से समापवर्तक कखग निकाल देने पर

$$\text{कखग नि} = \text{कखग} \begin{vmatrix} १ & \text{क}^2 & \text{क}^3 \\ १ & \text{ख}^2 & \text{ख}^3 \\ १ & \text{ग}^2 & \text{ग}^3 \end{vmatrix}$$

$$\text{अर्थात् नि} = \begin{vmatrix} १ & \text{क}^2 & \text{क}^3 \\ १ & \text{ख}^2 & \text{ख}^3 \\ १ & \text{ग}^2 & \text{ग}^3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{खग} & \text{क} & \text{क}^2 \\ \text{गक} & \text{ख} & \text{ख}^2 \\ \text{कख} & \text{ग} & \text{ग}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ & \text{क}^2 & \text{क}^3 \\ १ & \text{ख}^2 & \text{ख}^3 \\ १ & \text{ग}^2 & \text{ग}^3 \end{vmatrix}$$

उदाहरण ३— $\begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ \text{क}^2 & \text{ख}^2 & \text{ग}^2 \end{vmatrix}$ की अर्हा निकालो।

प्रथम स्तम्भ में से द्वितीय को और द्वितीय में से तृतीय

को घटाने पर $\begin{vmatrix} 0 & 0 & १ \\ क-ख & ख-ग & ग \\ क^२-ख^२ & ख^२-ग^२ & ग^२ \end{vmatrix}$ प्राप्त होता है।

प्रथम स्तम्भ में से (क – ख) और द्वितीय में से (ख – ग) समापवर्तक निकाल देने पर

$$(क-ख)(ख-ग) \begin{vmatrix} 0 & 0 & १ \\ १ & १ & ग \\ क+ख & ख+ग & ग^२ \end{vmatrix}$$ प्राप्त होता है।

इस निश्चायक का विस्तार प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों में करने पर

(क – ख) (ख – ग) [ख + ग – क – ख]

अर्थात् (क – ख) (ख – ग) (ग – क) प्राप्त होता है

$$अतः \begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ क & ख & ग \\ क^२ & ख^२ & ग^२ \end{vmatrix} = (क-ख)(ख-ग)(ग-क)$$

१५.५ उपनिश्चयाक और सहगुणक (minors and co-factors)

$$\begin{vmatrix} क_१ & ख_१ & ग_१ \\ क_२ & ख_२ & ग_२ \\ क_३ & ख_३ & ग_३ \end{vmatrix}$$ इस निश्चायक पर विचार करो।

संघटक $क_१$ प्रथम पंक्ति और प्रथम स्तम्भ में है।

प्रथम पंक्ति और प्रथम स्तम्भ [जिनमें $क_१$ है] को हटाने पर जो निश्चायक रह जाता है वह $क_१$ का उप-

निश्चायक कहलाता है। यदि मूल निश्चायक का नि से अभिधान किया जाय तो क$_1$ के उपनिश्चायक का नि$_{क_1}$ से अभिधान किया जायगा। इसी प्रकार ख$_1$ और ग$_1$ संघटकों के उपनिश्चायकों का क्रमशः नि$_{ख_1}$, नि$_{ग_1}$ से अभिधान होगा। अतः दत्त निश्चायक का प्रथम पंक्ति के संघटको के पदों में अभिव्यक्त विकास यह होगा—

नि = क$_1$नि$_{क_1}$ − ख$_1$ नि$_{ख_1}$ + ग$_1$नि$_{ग_1}$ अथवा यदि विस्तार प्रथम स्तम्भ के संघटकों के पदों में किया जाय तो

नि = क$_1$नि$_{क_1}$ − क$_2$नि$_{क_2}$ + क$_3$नि$_{क_3}$

उपर्युक्त विस्तारों में घन और ऋण चिह्नों की उपस्थिति पदसंहति के प्रयोग को कठिन बनाती है। अतः चिह्नित उपनिश्चायक अथवा सहगुणकों के प्रयोग से इस को सरल बनाया जा सकता है।

किसी निश्चायक में किसी संघटक का सहगुणक समुचित चिह्न सहित लिए गए उसीके उपनिश्चायक के सम होता है। किसी संघटक के सहगुणक का इस के दीर्घ अक्षर से अभिधान किया जाता है। उदाहरणार्थ क$_1$, ख$_1$ ग$_1$ के सहगुणकों का क्रमशः का$_1$, खा$_1$, गा$_1$ से अभिधान होगा।

सहगुणक संकेतना के प्रयोग से निश्चायक के विस्तार में सब पदों के चिह्न एक ही रहते हैं। इस संकेतना का प्रयोग करने पर निश्चायक नि का यह विकास होगा—

नि = क$_1$का$_1$ + ख$_1$खा$_1$ + ग$_1$गा$_1$

अथवा नि = क$_1$का$_1$ + क$_2$का$_2$ + क$_3$का$_3$

क्योंकि सहगुणक केवल उपयुक्त चिह्न लगाया हुआ उपनिश्चायक होता है इसलिए संवादी उपनिश्चायक की अर्हा से सहगुणक की अर्हा प्राप्त करने के लिए निम्न-लिखित नियम है—

नियम— अग्र संघटक से, संघटक की स्थिति पंक्ति अथवा स्तम्भ अथवा दोनों पर गिनो। संघटक की स्थिति युग्म और अयुग्म होने के अनुसार, उसका सहगुणक ऋण अथवा धन चिह्न लगे हुए संवादी उपनिश्चायक के सम है। उदाहरणार्थ ख_3 का सहगुणक खा_3 और उपनिश्चायक $\text{नि}_{\text{ख}3}$ है। क्योंकि अग्र संघटक से गिने जाने पर ख_3 युग्म स्थिति पर है इसलिए

$$\text{खा}_3 = -\text{नि}_{\text{ख}3}$$

प्रश्नावलि २१

इन निश्चायकों की अर्हाएं निकालो—

(१) $\begin{vmatrix} \text{२४} & \text{८} & \text{३} \\ \text{१५} & \text{७} & \text{१} \\ \text{११} & \text{२} & \text{४} \end{vmatrix}$ (२) $\begin{vmatrix} \text{१९} & \text{२} & \text{१७} \\ \text{७} & \text{५} & \text{२} \\ \text{१२} & \text{३} & \text{९} \end{vmatrix}$

(३) $\begin{vmatrix} \text{४} & \text{२} & \text{५} \\ \text{१} & \text{१} & \text{६} \\ \text{६} & \text{३} & \text{०} \end{vmatrix}$ (४) $\begin{vmatrix} \text{५२} & \text{१३} & \text{६७} \\ \text{५०} & \text{१७} & \text{८९} \\ \text{७९} & \text{१९} & \text{१०२} \end{vmatrix}$

(५) $\begin{vmatrix} \text{क} & \text{ज} & \text{छ} \\ \text{ज} & \text{ख} & \text{च} \\ \text{छ} & \text{च} & \text{ग} \end{vmatrix}$ (६) $\begin{vmatrix} \text{१} & \text{ओ} & \text{ओ}^2 \\ \text{ओ} & \text{ओ}^2 & \text{१} \\ \text{ओ}^2 & \text{१} & \text{ओ} \end{vmatrix}$ जहां ओ एक का घनमूल है।

(७) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & क & क^2-खग \\ १ & ख & ख^2-कग \\ १ & ग & ग^2-कख \end{vmatrix} = ०$$

(८) दिखाओ कि $\begin{vmatrix} क+ख & ख+ग & ग+क \\ त+थ & थ+द & द+त \\ ट+ठ & ठ+ड & ड+ट \end{vmatrix} = २\begin{vmatrix} क & ख & ग \\ त & थ & द \\ ट & ठ & ड \end{vmatrix}$

(९) सिद्ध करो कि $\begin{vmatrix} य & क_1 & क_2 \\ क_1 & य & क_2 \\ क_2 & क_1 & य \end{vmatrix}$

$= (य-क_1)(य-क_2)(य+क_1+क_2)$ [रंगुन १९३९

(१०) निश्चायक $\begin{vmatrix} ख^2ग^2 & खग & ख+ग \\ ग^2क^2 & गक & ग+क \\ क^2ख^2 & कख & क+ख \end{vmatrix}$ की अर्हा निकालो

(११) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} क-ख-ग & २क & २क \\ २ख & ख-ग-क & २ख \\ २ग & २ग & ग-क-ख \end{vmatrix} = (क+ख+ग)^3$$

(१२) निम्न-लिखित ऐकात्म्य- सिद्ध करो

$$\begin{vmatrix} (र+ल)^2 & य^2 & य^2 \\ र^2 & (ल+य)^2 & र^2 \\ ल^2 & ल^2 & (य+र^2) \end{vmatrix} = २यरल(य+र+ल)^3$$

उत्तरमाला

प्रश्नावलि १

(१) $य=३, र=४$ (२) $य=७, र=८$

(३) $य=\frac{३}{२}, र=\frac{५}{२}$ (४) $य=-\frac{४}{३}, र=\frac{७}{३}$

प्रश्नावलि २

(१) (अ) $\frac{य^{३}}{र^{४}}$ (आ) $\frac{१}{य^{\frac{१}{८}}}$ (इ) $\frac{१}{र^{\frac{४}{५}}}$ (ई) $\frac{य^{\frac{३}{५}}}{र^{१\frac{३}{८}}}$

(उ) $\frac{१}{य^{\frac{२}{३}}}$ (ऊ) $\frac{१}{य^{\frac{४}{८}}र^{\frac{३}{८}}}$

(२) (अ) २ (आ) $\sqrt{३}$ (इ) $\frac{३२}{३}$ (ई) $\frac{१६}{२५}$

(३) $\frac{र^{४}}{य}$ (४) दूसरा बड़ा है। (५) $\frac{२७}{४}$

(६) (अ) $य-१$ (आ) $य^{\frac{३}{४}}-र^{\frac{३}{४}}$

(इ) $४य^{२}+४य^{२}+७$

(७) $य^{\frac{३}{२}} + य^{१}र^{\frac{१}{३}} + य^{\frac{१}{२}}र^{\frac{२}{३}} + य\,र + य^{\frac{१}{२}}र^{\frac{४}{३}} + र^{\frac{५}{३}}$

(८)(क) $\frac{१}{य^{\frac{५}{१२}}र \times ल^{\frac{१}{१२}}}$ (ख) $\frac{य^{२त} - र^{२य}}{य^{त}र^{य}}$

(ग) $य^{\frac{१}{६}^{३}}$ (घ) $य\,र^{\frac{१}{१५}}ल^{\frac{२२}{१५}}$

(ङ) १ (च) $य^{त^{२}-य^{२}-२त^{३}}$

(छ) $\frac{१}{४^{४}टड}$ (ज) १

(९) (क) $र^{२}-२$ (ख) $र^{३}-३र$ (ग) $र^{४}-४र^{२}+२$

(१४) $म = \frac{न}{न-१}$

प्रश्नावलि ३

(१) $५\sqrt{६}, ४^{३}\sqrt{५}, २\sqrt{३}, ४^{४}\sqrt{३}, २^{५}\sqrt{१९}$

(२) (क) $७-\sqrt{३}$, (ख) $३-\sqrt{५}$ (ग) $\sqrt{३}-\sqrt{२}$

(३) (क) $७^{\frac{२}{३}} - २\times७^{\frac{१}{३}} + ४$ (ख) $५^{\frac{२}{३}} - ३\times५^{\frac{१}{३}} + ९$

(ग) $३^{\frac{२}{३}} - ३^{\frac{१}{३}}२^{\frac{१}{३}} + २^{\frac{२}{३}}$

(४) (क) $२-\sqrt{३}$ (ख) $\frac{२+\sqrt{२}(१-\sqrt{३})}{४}$

(ग) $\frac{७-३\sqrt{३}-\sqrt{५}+२\sqrt{१५}}{११}$

(५) $\frac{२}{३}\sqrt{५}[\sqrt{५}-१]$

(६) (क) $३-२$ श (ख) $१-३$ श (ग) $७-५$ श

(७) (क) $१७+७$ श (ख) $१०+५४$ श

(८) (क) $\frac{३-२श}{१३}$ (ख) $\frac{७-८श}{११३}$ (ग) $\frac{३-\sqrt{-२}}{११}$

(घ) $\frac{३२३-३६श}{३२५}$

(९) (अ) $-१+२$श (आ) $-\frac{१}{५}+\frac{२}{५}$श

(इ) $(३क+२ख)+(३-२कख)$श

(ई) $२(१-\sqrt{३})+२(१+\sqrt{३})$श

(१०) (क) $य=२,\ र=-३$ (ख) $य=३,\ र=-५$

(ग) $य=२,\ र=-२$ (घ) $य=४,\ र=१$

$य=६,\ र=-\frac{२}{३}$

(११) (क) $\pm[३+४श]$ (ख) $\pm[३+२श]$

(ग) $\pm[२-श]$

प्रश्नावलि ४

(१) (अ) $\frac{१}{३}(२९-२स)$ (आ) $७स-५$ (इ) $९स-५$

(ई) $\frac{स}{क}$ (उ) $\frac{स^२-स+१}{स}$

(२) (अ) $८६७\frac{१}{२}$ (आ) ८४० (इ) $९२\frac{१}{२}$

(ई) $६\frac{१}{४}$ (उ) ३३२·८५ (ऊ) $१३५\sqrt{५}$

(ए) $\frac{स}{२}\left[(५+स)क-२ख(४+स)\right]$ (ऐ) $स\frac{१}{३}$

(३) (अ) $\frac{५}{३}, \frac{२५}{१२}, \frac{५}{२}$.........

(आ) ७, १२, १७,......

(इ) ६, ११, १६, २१......

(ई) $स^२+१-स, स^२+२(१-स), स^२+३(१-स)$

(उ) $क+\frac{ख-क}{२(स+१)}, क+\frac{ख-क}{स+१}, क+\frac{३(ख-क)}{२(स+१)}$

$मध्यपद=\frac{क}{२}+\frac{ख}{२}$

(५) १६५

(६) $प_{५०}=१०५$ $यो_{५०}=२८००$ (८) १३, १७, २१

(९) २, $३\frac{१}{२}$, ५, $६\frac{१}{२}$, ८ (११) ३७ (१२) ७२

(१३) २० (१४) १६ (१५) २५ (१६) १४

(१७) ३६ (१८) २५ (१९) ५०५०० यष्टियां

(२४) $\frac{४}{५}$ (२९) क, ३क, ५क,... (३१) $-(त+थ)$

प्रश्नावलि ५

(१) (क) -५१२ (ख) $\frac{१५}{३२}$

(ग) $-\frac{१२८}{१०९३५}$ (घ) $\frac{२^{स}-१}{३}$

(२) (क) २०४६ (ख) $\frac{१३३}{२४३}$

(ग) $\frac{६३\,(२+\sqrt{२})}{३२}$ (घ) $\frac{८}{२१}\left[१+(-)^{स+१}\times\left(\frac{३}{४}\right)^{स}\right]$

(ङ) $\frac{क^{ट}\left[१-क^{सठ}\right]}{१-क^{ठ}}$

(च) $\frac{\frac{क}{य}\sqrt{\frac{५}{३}}\left[१-\left(\sqrt{\frac{३य}{५क}}\right)^{म}\right]}{१-\sqrt{\frac{३य}{५क}}}$

(३) ३, ६, १२ (४) $\frac{४}{५}$, ४, २०

(८) ६ (९) $\frac{३^{स}-१}{२}$

(१०) (क) $\frac{१}{९}$, $\frac{१}{३}$, १, ३ (ख) ६, १८, ५४, १६२

(ग) $\frac{१६}{२७}$, $\frac{८}{९}$, $\frac{४}{३}$, २, ३ (घ) ९, ३, १, $\frac{१}{३}$, ९

(११) $\left(\frac{१}{२}\right)^{\frac{१}{२}}$

(१२) ३, १२ (१६) $\frac{क}{न-१}\left[\frac{न\,(न^{स}-१)}{न-१}-स\right]$ जहां

क प्रथम पद है और न साधारण निष्पत्ति है

(२३) $\sqrt{मन}$, $म\left(\frac{न}{म}\right)^{\frac{त}{२थ}}$ (२४) $८\frac{१}{१३}$, $१२\frac{१}{१३}$

प्रश्नावलि ६

(१) (क) $\frac{१}{१-य}+\frac{२य}{(१-य)^{२}}-\frac{२य^{स}}{(१-य)^{२}}-\frac{(२स-१)य^{स}}{१-य}$

(ख) $४-\frac{१}{२^{स-२}}-\frac{स}{२^{स-१}}$

(ग) $-\frac{७}{६}-\frac{५}{३६}\left[७^{स+१}-७\right]+\frac{५स+१}{६}\times ७^{स+१}$

(२) (क) $\frac{३}{२}(\sqrt{३}+१)$ (ख) $\frac{९}{४}$ (ग) $\frac{५\sqrt{१}}{४}$

(घ) $\frac{४+३\sqrt{२}}{२}$ (३) (क) $\frac{३}{७}$ (ख) $\frac{२१}{१६}$

(ग) ६ (घ) १

(४) (क) $\frac{३स(स+१)}{२}+\frac{५}{४}(५^{स}-१)$

(ख) $\frac{य(१-य^{स})}{१-य}+\frac{क\,स(स+१)}{२}$ (ग) $\frac{कय-ख}{य^{२}-१}$

(घ) $कस^{२}+ख(२^{स}-१)$

(५) $\frac{८}{३}+\frac{१}{३\times २^{२स-२}}-\frac{१}{३\times २^{स-३}}-\frac{१}{३\times २^{स-२}}$, $\frac{८}{३}$

(६) सवाँ पद $खय^{स-१}(य-१)$। प्रथम पद क+खय है प्रथम पद से आगे सब पद गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

(७) (क) $\frac{८५७}{२४७५}$ (ख) $\frac{५}{९}$ (ग) $\frac{४७}{१९८}$ (१०) ९

प्रश्नावलि ७

(१) (क) $\frac{१}{६८}, \frac{१}{१३२}, \frac{१}{१२६}, \frac{१}{२६०}$ (ख) $\frac{१६}{५}, \frac{१६}{६}, \frac{१६}{७}$

(ग) $\frac{१५०}{१२१}, \frac{७५}{४६}, \frac{५०}{२१}, \frac{७५}{१७}$ (घ) $\frac{३}{४}, \frac{६}{११}, \frac{३}{७}, \frac{६}{१७}, \frac{३}{१०}$

(२) $\frac{१}{३}, \frac{१}{४}, \frac{१}{५}$ (३) $\frac{(न-१)\,क\,ग}{क(न-१)+ग(स-न)}$

(८) ८, ७२ (९) १२, ३

प्रश्नावलि ८

(१) (क) $\frac{२}{३}$ स (स+१)(२स+१)

(ख) $\frac{१}{३}$ स (४स^{२} − १)

(ग) $\frac{१}{१२}$ स (स+१)(३स^{२}+१९स+८)

(घ) $\frac{१}{१२}$ स (स+१)(स+२)(३स+१)

(च) $\frac{स}{२}$ (६स^{२}+३स−१)

(छ) स^{२} (२स^{२}−१)

(ज) यदि स युग्म हो तो $-\frac{स}{२}$ (स+१) और स के अयुग्म होने पर $\frac{स}{२}$ (स+१)

(३) (क) २^{स}+१ ; २ (२^{स}−१)+स

(ख) स^{२}+१ ; $\frac{१}{६}$ स (२स^{२}+३स+७)

(ग) $\frac{१}{२}(३^{स}-१)$; $\frac{३}{४}(३^{स}-१)-\frac{स}{२}$

(घ) $स^{२}+२स-१$; $\frac{१}{६}स(२स^{२}+९स+१)$

(ङ) $२^{स+१}-२$; $४(२^{स}-१)-२स$

(५) (क) $\frac{१}{३}स(स+१)(स+२)$

(ख) $\frac{स}{६}(४स^{२}+१५स+१७)$

(ग) $\frac{१}{६}स(स+१)(९स^{२}+१९स+८)$

(घ) $\frac{१}{२४}स(स+१)(स+२)(३स+१)$

(ङ) $\frac{१}{१२}स(स+१)(३स^{२}+११स+४)$

(च) $\frac{१}{६}स(स+१)(२स^{२}+२स-१)$

(छ) $\frac{१}{३}स(स+१)(८स^{२}+८स-१)$

(ज) $\frac{१}{४८}स(स+१)(स+२)(३स+५)$

(झ) $\frac{१}{६}स(स^{२}-१)$

(झ) $\frac{१}{१२}$ स $(स+१)^{२}$ $(स+२)$

(६) (क) $\left[\frac{१०}{९}\ (१०^{स}-१)-स\right]$

(ख) $\left[\frac{१०}{२७}\ (१०^{स}-१)-\frac{स}{३}\right]$

(ग) $\left[\frac{२०}{२७}\ (१०^{स}-१)-\frac{२स}{३}\right]$

प्रश्नावलि ९

(१) (च) वास्तविक और असम; १,३

(छ) वास्तविक और अपरिमेय; $१ \pm \sqrt{३}$

(ज) वास्तविक और समान; ७,७

(झ) संकर $१ \pm \sqrt{-१ \cdot ३}$

(२) (च) $य^{२}-१२य+३५=०$ (छ) $य^{२}-य-१२=०$

(ज) $य^{२}+८य+१५=०$ (झ) $य^{२}-२य-१=०$

(ट) $य^{२}+४य+१=०$ (ठ) $य^{२}-६य-३२=०$

(ड) $य^{२}+६य+१३=०$

(ढ) $य^{२}+२कय+क^{२}-८ख=०$

(३) (च) २, $\frac{१}{२}$ (छ) $-\frac{२}{३}$ (ज) $-\frac{५}{२}$

(९) (च) क और ग समानचिह्न के किन्तु ख विपरीत चिह्न का। (छ) क और ख समानचिह्न के किन्तु ग विपरीत चिह्न का।

(१०) १०, $४\sqrt{६}$, १

(१२) (च) $\frac{ख^{४} - ४ख^{२}कग + २क^{२}ग^{२}}{क^{४}}$

(छ) $\frac{ख^{४} - ४ख^{२}कग + २क^{२}ग^{२}}{क^{३}ग}$

(ज) $\frac{ग^{४}ख\,(ख^{२} - ३कग)}{क^{७}}$

(१४) (च) $\frac{त}{थ^{३}}(त^{२} - ३थ)$

(छ) $\frac{त\sqrt{त^{२} - ४थ}\,(त^{२} - २थ)}{थ^{३}}$

(ज) $\frac{त\,(त^{२} - २थ)\sqrt{त^{२} - ४थ}}{थ^{६}} \times (त^{४} + ४थ^{२} - ४त^{२}थ - २त^{२}थ^{२})$

(१५) $य^{३} + ३ = ०$ (१६) $३य^{२} + १ = ०$

(१७) (१) $खग\,य^{२} + (कग + ख^{२})\,य + कख = ०$

(२) $क^{४}य^{२} - २क^{२}(ख^{२} - २कग)य + ख^{२}(ख^{२} - ४कग) = ०$

(१८) (१) $थय^2 - (त^2 - २थ)य + थ = ०$
(२) $थय^2 - २तय + ४ = ०$
(३) $थ^2य^2 - त(त^2 - ३थ)य + १ = ०$
(४) $य^2 - (त + \frac{त}{थ})य + २ + थ + \frac{१}{थ} = ०$

प्रश्नावलि १०

(१) य की $\frac{८}{३}$ से बड़ी और $-\frac{५}{२}$ से छोटी अर्हाओं के लिए
(२) य की ३ से बड़ी तथा -२ से छोटी अर्हाओं के लिए
(३) $२ < य < ७$
(१४) (१) $त = -३$ (२) $त = १०$ (३) $त = २$
(१५) $-\frac{११}{४}$ अथवा $\frac{७}{८}$
(२१) $क = ०$ अथवा ९
(२२) $[क क_1 - ख ख_1]^2 + ४[ज ख_1 + ज_1 क] + [क ज_1 + क_1 ज] = ०$

प्रश्नावलि ११

(१) $य = २७, \frac{१२५}{३०८७}$ (२) $य = २, य = ८$

(३) $य = ०, \quad य = -\frac{३}{४} \quad य = -५$

(५) $य = १, २, \quad \frac{३ \pm \sqrt{-१}}{२}$

(६) $य = २, -३, \quad \frac{-३ \pm \sqrt{-१४३}}{६}$

(७) $य = -६, -२, \quad \frac{-१५ \pm \sqrt{४१}}{२}$

(८) $य = ०, -५, \quad \frac{-५ \pm \sqrt{-१५}}{२}$

(९) $य = -४, -४ \pm \sqrt{१७}$ (१०) $य = ७$

(११) $य = २, -\frac{१}{२}$ (१२) $य = ०, -३$

(१३) $य = ०, ३$ (१४) $य = \pm ३$

(१५) $य = १, २$ (१६) $य = -\frac{४}{९}, ५$

(१७) $य = ४, \frac{१}{४}, २, \frac{१}{२}$ (१८) $य = -२, \frac{१}{२}, -\frac{३}{२}, \frac{२}{३}$

(१९) $य = , -५, -\frac{१}{५}, -३, -\frac{१}{३}$ (२०) $य = १, \frac{१}{२}, २, \frac{३}{२}, \frac{२}{३}$

प्रश्नावलि १२

(१) $य=२, र=१; य=१, र=२$ (२) $य=२, र=१।$ $य=१४, र=-२९$ (३) $य=\frac{३}{५}, र=\frac{४}{५}$

(४) $य=१, र=-२; य=-\frac{३८}{१३}, र=\frac{८}{१३}$

(५) $य=१, र=५; य=४, र=२$ (६) $य=६, र=३;$ $य=३, र=६$ (७) $य=\frac{१}{३}, र=\frac{१}{२}।$ $य=\frac{५}{२},$ $र=-\frac{५}{३}$

(८) $य=२, र=८। य=८, र=२$ (९) $य=३, र=६।$ $य=६, र=३$ (१०) $य=२३, र=१; य=२, र=२२$

(११) $य=४, र=८। य=८, र=४$

(१२) $य=१, र=३; य=-१, र=-३,$
$य=\frac{३\sqrt{२१}}{२१}, र=\frac{२\sqrt{२१}}{२१}; य=-\frac{३\sqrt{२१}}{२१},$
$र=\frac{-२\sqrt{२१}}{२१}$

(१३) $य=२, र=३;\ य=-२, र=-३$

$$य=\pm\frac{४३}{\sqrt{१५१}},\ र=\pm\frac{२३}{\sqrt{१५१}}$$

(१४) $य=\pm२, र=+२;\ य=\pm\frac{२}{३}\sqrt{६},\ र=\pm\frac{४}{३}\sqrt{६}$

(१५) $य=\pm\frac{२}{७}\sqrt{३५},\ र=\pm\frac{\sqrt{३५}}{७};\ य=\pm\frac{३}{२},\ र=\pm\frac{२}{३}$

(१६) $य=\pm२,\ र=\pm३,\ य=\pm३, र=\pm२$

(१७) $य=-२, र=३;\ य=-\frac{१}{२}, र=०;\ य=१, र=१;$

$य=३\frac{१}{३}, र=-५\frac{१}{३}$

(१८) $य=३, र=१;\ य=-१, र=-३;\ य=१\pm\sqrt{-१०},$

$र=-१\pm\sqrt{-१०}$

(१९) $य=५, र=१;\ य=१, र=५$

$य=३\pm\sqrt{-५८}, र=३\mp\sqrt{-५८}$

(२०) $य=३, र=१;\ य=-१, र=-३;$

$य=\pm\sqrt{-६}+१, र=\pm\sqrt{-६}-१$

(२१) $य=७, र=५;\ य=-५, र=-७$

(२२) $य=\frac{४}{५}$, $र=२०$; $य=\frac{१}{५}$, $र=५$

(२३) $य=-३, र=-२; य=१, र=२$

(२४) $य=३, र=१; य=१, र=३$

(२५) $य=४, र=२; य=-२, र=-४;$

$$य=१\pm\frac{\sqrt{३}}{११}, र=-१\pm\frac{\sqrt{३}}{११}$$

(२६) $य=३, र=३; य=-\frac{१}{३}, \quad र=-\frac{१}{३}$

$य=३, र=-\frac{१}{३}; \quad य=-\frac{१}{३}, र=३$

(२७) $य=\pm१, र=\pm३; \quad य=\pm३, र=\pm१$

(२८) $य=\pm१, र=\pm२; \quad य=\pm२, र=\pm१$

(२९) $य=२, र=४; \quad य=-२\frac{२}{३}, र=-४\frac{२}{३}$

(३०) $य=४\frac{२}{३}, र=०; \quad य=९, र=७$

प्रश्नावलि १६

(१) $य=\pm५\sqrt{\frac{१७}{१७७}}, \quad र=\pm६\sqrt{\frac{१७}{१७७}},$

$ल=\pm७\sqrt{\frac{१७}{१७७}}$

(२) य = ±२, र = ±६, ल = ±३

(३) य = ३, र = २, ल = ४; य = २, र = ३, ल = ४

$य = २ + \sqrt{-२}$, $र = २ - \sqrt{-२}$, ल = ५

$य = २ - \sqrt{-२}$ $र = २ + \sqrt{-२}$ ल = ५

(४) य = १, र = ३, ल = २; य = ५, र = १, ल = ०

य = १, र = २, ल = ३; य = ५, र = ०, ल = १

(५) $य = \frac{१}{२}$, $र = \frac{१}{३}$, $ल = \frac{१}{४}$

(६) य = ±१, र = ±२, ल = ±३

(७) य = ५, $र = \frac{५}{३}$, $ल = \frac{५}{२}$;

य = −७, $र = -\frac{११}{३}$, $ल = -\frac{१}{२}$

(८) य = ५, र = ३, ल = ६;

य = −७, र = −५, ल = −८

(९) य = ३, र = ४, ल = ५;

य = −१३, र = −१४, ल = −१५

(१०) य = २, र = ३, ल = १;

य = −६, र = −७, ल = −५

(११) $य=२, \quad र=३, \quad ल=४;$

$य=-४, \quad र=-५, \quad ल=-६$

(१२) $य=१, \quad र=१, \quad ल=१;$

$य=-३, \quad र=-३, \quad ल=-३$

(१३) $य=३, \quad र=४, \quad ल=५;$

$य=-३, \quad र=-४, \quad ल=-५$

(१४) $$य=\frac{१\pm\sqrt{२ख+२ग-२क+१}}{२}$$

$$र=\frac{१\pm\sqrt{२क-२ख+२ग+१}}{२}$$

$$ल=\frac{१\pm\sqrt{२क+२ख-२ग+१}}{२}$$

(१५) $$य=\pm क\sqrt{\frac{ख+ग-क}{(क+ख-ग)(क+ग-ख)}}$$

$$र=\pm ख\sqrt{\frac{क+ग-ख}{(क+ख-ग)(ख+ग-क)}}$$

$$ल=\pm ग\sqrt{\frac{क+ख-ग}{(क+ग-ख)(ख+ग-क)}}$$

(१६) $य=\pm६, र=\pm४, ल=\pm५$

(१७) $$य=\pm\frac{त^२-थद}{\sqrt{त^३+थ^३+द^३-३तथद}}$$

$$र = \pm \frac{थ^{२} - तद}{\sqrt{त^{३} + थ^{३} + द^{३} - ३तथद}}$$

$$ल = \pm \frac{द^{२} - तथ}{\sqrt{त^{३} + थ^{३} + द^{३} - ३तथद}}$$

(१८) $य = \pm १, र = \pm २, ल = \pm ३$

प्रश्नावलि १४

(१) ५६ (२) ४८० (३) $^{१२}क_{८}$ (४) १००८०

(५) $|\underline{१०}, २\,|\underline{८}$ (६) $५६\,|\underline{९}$

(७) (अ) $\frac{|\underline{१२}}{|\underline{९}}$ (आ) $\frac{|\underline{११}}{|\underline{७}}$ (इ) $\frac{|\underline{स}}{|\underline{स-४}}$

(ई) $\frac{|\underline{स+२}}{|\underline{स-१}}$ (उ) $\frac{|\underline{स+न}}{|\underline{स-१}}$

(८) (अ) स (स − १) (आ) $|\underline{स-२}\ (स^{२} - स - १)$

(१०) ३६०० (११) १२ (१२) ९८८०, २०३७५, ८२५१२८८८ (१३) ६०४८०, २५५०२५, ७४२५६०

(१४) न = स − १ (१६) ३० (१७) ६५ (१८) ३६४

(१९) $^{१५}च_{११} \times {}^{१३}च_{१०}$ (२०) ३५४ (२१) ९४५

(२२) २४, १०६६५६

(२३) $\frac{|८\ |८}{|३\ |४}$

(२४) २०१६, ३०२४ (२५) २० (२६) ६, ११वाँ

(२७) ३५६७२००

(२८) $\frac{|१२}{|७\ |५}$

(२९) ६०

(३०) $\frac{|३९}{(|४)^{३}(|६)^{३}|५}$

(३२) $\frac{|१५}{|६\ |४\ |५}$ (३३) $\frac{|६}{(|२)^{३}}$

(३४) १५९ (३५) ११० (३६) ५० (३७) ५०

(३८) २४३ (३९) ४०९६ (४०) १२५ (४१) ३१

(४२) ५३, ७५८ (४३) २२०

(४४) (१) $\frac{१}{२}$ [न(न − १) − म (म − १) + २]

(२) $\frac{१}{६}$ [न(न − १) (न − २) − म (म − १) (म − २)]

(४६) ९०

प्रश्नावलि १६

(१) $य^{४} - ६९य^{२} - ४४य + ६७२$ (२) (क) ५ (ख) -५

(३) (क) $य^{५} + १०य^{४} + ४०य^{३} + ८०य^{२} + ८०य + ३२$

(ख) $६४य^{६} + ५७६रय^{५} + २१६०र^{२}य^{४} + ४३२०र^{३}य^{३}$
$+ ४८६० र^{४}य^{२} + २९१६ र^{५}य + ७२९ र^{६}$

(ग) $६२५ - २०००य + २४००य^{२} - १२८०य^{३}$
$+ २५६य^{४}$

(घ) $१ - \frac{७}{य} + \frac{२१}{य^{२}} - \frac{३५}{य^{३}} + \frac{३५}{य^{४}} - \frac{२१}{य^{५}} + \frac{७}{य^{६}} - \frac{१}{य^{७}}$

(ङ) $य^{१०} + १५कय^{७} + ९०क^{२}य^{४} + २७०क^{३}य$
$+ ४०५\frac{क^{४}}{य^{२}} + २४३\frac{क^{५}}{य^{५}}$

(च) $२४३य^{५} - २०२५य^{२} + ६७५०\frac{१}{य} - ११२५०\frac{१}{य^{४}}$
$+ \frac{९३७५}{य^{७}} - \frac{३१२५}{य^{१०}}$

(४) (अ) $१३६१३६६० क^{८}य^{८}$ (आ) $१६५ \frac{य^{५}}{क^{५}}$

(इ) $-१२० \frac{य^{४}}{क^{४}}$ (ई) $७६०र^{६}य$

(५) -२५२ अथवा $(-)^{५}\,{}^{१०}च_{५}$

(६) ०, $२१० क^{११} ख^{१}$ (७) $३१२ र^{२}$

(८) $२१० न^{१२}$ (९) $-{}^{१०१}च_{३१}\,(२)^{३१}$

(१०) यदि स, ३ का अपवर्त्य हो तो ${}^{१५}च_{\frac{स}{३}}\,(-३क^{३})^{\frac{स}{३}}$

अन्यथा कोई भी पद नहीं।

(११) ${}^{२स}च_{स}\,य^{-स}$

(१४) ${}^{१३}च_{६}\,य^{६}क^{७}$ और ${}^{१३}च_{७}\,य^{७}क^{६}$

(१५) $-१५४\,य$ तथा $\frac{१३८६}{य}$ (१६) -६१२३६

(१७) $\frac{|२स}{|स\;|स}$ (१८) ९ वां पद, ४९५

(१९) ४ था पद, $\frac{५३७६}{२७}$ (२०) न = १४

(२१) न = स + १ (२४) न = १३

प्रश्नावलि १७

(१) ४५ (२) $२७१२\,य^{५}$ (३) ०

(४) (अ) ११वां पद (आ) ५वां पद (इ) १२वा पद

(५) $\frac{१६}{१७} < य < \frac{१७}{१६}$

(६) (१) $\frac{१६५}{८}$ (२) ${}^{१४}च_{६}\left(\frac{३}{२}\right)^{६}$ (३) ${}^{०}च_{१५}\ ३^{१५}$

(४) $-\,{}^{१०}च_{१} \times २^{१०}\left(\frac{४}{२५}\right)$

(७) $२^{स-१}\,(स+२)$

प्रश्नावलि १८

(१) (च) $(-)^{न}\,\frac{३\times५\times७\ \ldots\ldots\ (२न+१)}{२^{न}\,\underline{|न}}\,य^{न}$

(छ) $\frac{१\times३\times५\ \ldots\ldots\ (२न-१)}{\underline{|न}}\left(\frac{य}{२}\right)^{न}$

(ज) $(-)^{न}\,\frac{१\times३\times५\times७\ \ldots\ldots\ (२न-३)}{\underline{|न}}\,य^{न}$

(झ) $(-)^{न} \quad (न+१) \; य^{२न}$

(ट) $\dfrac{१}{२७} \; \dfrac{[न+१]\,[न+२]}{१\times२} \left(\dfrac{य}{३}\right)^{न}$

(ठ) $स\dfrac{१}{\sqrt{क}} \; \dfrac{(स+१)\,(२स+१)\ldots(\overline{न-१}\,स+१)}{स^{न}\,\underline{|न}} \times \left[\dfrac{य}{क}\right]^{न}$

(ड) $\dfrac{२\times५\times८\times११\ldots(३\,न-१)}{\underline{|न}} \left(\dfrac{२\,य}{३}\right)^{न}$

(ढ) $\dfrac{४\times७\times१०\ldots(३\,न-२)}{\underline{|न}} \quad य^{न}$

(२) (च) $\dfrac{११\times१९\times२३\times२७}{४^{२}} ५^{०}$

(छ) $-९४५\,क^{-२४}\,ग^{३};\; -३०६१८\,क^{-३०}\,ख^{५}$

(ज) $\dfrac{१}{२^{१४}}$

(३) $१-२\,य-२\,य^{२}-४\,य^{३}\ldots\ldots$

(४) $क^{३}\left[१-\dfrac{३य}{क}+\dfrac{३}{२}\dfrac{य^{२}}{क^{२}}+\dfrac{य_{३}}{२क^{३}}+\dfrac{३य^{४}}{८क^{४}}+\dfrac{३य^{५}}{८क^{५}}+\ldots\right]$

$$\dots\dots + \frac{३ \times १ \times १ \times ३ \times ५ \dots (२न - ५)}{|\underline{न}} \frac{य^न}{क^{३न-३}}.$$

(५) $क\left[१ + \frac{य}{२क^३} - \frac{य^२}{८क^६} + \frac{य^३}{१६क^९} - \frac{५}{१२८}\frac{य^४}{क^{१२}} + \dots\dots\right]$

(६) $-\frac{७ \times ४ \times १ \times २ \times ५ \times ८ \dots (३न - १०)}{|\underline{न}}$

(७) $\frac{स(स-१)}{२} + [स(स+१)] + \frac{(स+१)(स+२)}{१\cdot२}$

(८) (क) २रा पद (ख) ७वा पद (ग) ९वा पद

(९) (क) २·०२०१०१ (ख) १·००३९

(ग) १·०१००४० (घ) ०·४९६७

(१०) (क) १२१ (ख) $-\frac{१}{४}\left[३ + \frac{५}{३^८}\right]$

(ग) २ (घ) $५^{स+१} - ४^{स+१}$

(ङ) $(-२)^{स-३}[स-८]$

(१२) ७१५

(१७) $\frac{१}{\sqrt[ ]{\frac{४}{९}}}$ (१८) $\sqrt{३}$

(१९) $२\sqrt{२}$ (२०) $(९\sqrt{३}-३)$

(२३) $य = र - र^{२} + र^{३} - र^{४} + \ldots\ldots$

(२४) $य = \frac{१}{२} र - \frac{१ \times ३}{२ \times ४} र^{२} + \frac{१ \times ३ \times ५}{२ \times ४ \times ६} र^{३} - \ldots\ldots$

प्रश्नावलि १९

(१) ८, ७, −१, −२, −४ (२) ७, ५

(३) ४, ५, −४ (४) (क) ४ (ख) ६ (ग) ६ (घ) $\frac{१}{४२}$

(५) (अ) $\frac{३}{५}$छेक + ७छेख − ८छेग

(आ) छेक − २छेख + २छेग

(इ) −छेक + ३ छेख + ६ छेग

(ई) छेक + ११छेख − $\frac{१४}{३}$ छेग

(८) (क) ३ (ख) ५ (ग) −१ (घ) −३ (ङ) −६

(९) $\dfrac{\text{छेक}}{\text{छेख} - \text{छेक}}$

(१०) य = १.७६५ (११) य = २.५६९

(१२) य = ०, र = ० ; य = ४, र = २

(१३) य = १६.६३

(१४) $\text{य} = \text{१०}^{\frac{१}{२}[\text{क}+३\text{ख}]}$, $\text{र} = \text{१०}^{\frac{१}{२}(\text{क}-३\text{ख})}$

प्रश्नावलि २०

(१) $१ - \dfrac{\text{य}}{|\underline{२}} + \dfrac{\text{य}^२}{|\underline{३}} - \dfrac{\text{य}^३}{|\underline{४}} + \dfrac{\text{य}^४}{|\underline{५}} - \ldots\ldots$

(२) $\text{घा}\left[१ + \text{य} + \dfrac{२\text{य}^२}{|\underline{२}} + \dfrac{५\text{य}^३}{|\underline{३}} + \dfrac{१५\text{य}^४}{|\underline{४}} + \ldots\ldots\right]$

(३) $\text{य} - \dfrac{\text{य}^३}{|\underline{३}} + \dfrac{\text{य}^५}{|\underline{५}} - \dfrac{\text{य}^७}{|\underline{७}} + \ldots\ldots$

(५) $(-)^{\text{न}}\left[\dfrac{१}{|\underline{\text{न}}} + \dfrac{२}{|\underline{\text{न}-१}} + \dfrac{३}{|\underline{\text{न}-२}}\right]$

(६) $\frac{१}{१-क}[घा - घा^{क}]$ (९) $घा + घा^{-१} - २$

(१०) (अ) $घा^{२} - घा$ (आ) $\frac{३\ घा}{२}$ (इ) घा

(ई) ५ घा (उ) ३ घा (ऊ) ५ घा − ३

(११) $३य - \frac{५\ य^{२}}{२} + \frac{९\ य^{३}}{३} - \frac{१७\ य^{४}}{५} + \ldots\ldots$

(१२) $\frac{क+ख}{य} - \frac{क^{२}+ख^{२}}{२\ य^{२}} + \frac{क^{३}+ख^{३}}{३\ य^{३}} - \ldots\ldots$

(१६) (अ) १ − छे२ (आ) १ − २ छे२

(इ) $छे२ - \frac{१}{२}$ (ई) $छे^{\frac{१}{५}}$

(१७) $य = र + \frac{र^{२}}{\underline{|२}} + \frac{र^{३}}{\underline{|३}} + \ldots\ldots$

(१९) ·८४५०९८०

प्रश्नावलि २१

(१) ९१ (२) ० (३) −८ (४) −५

(५) $कखग + २चछज - कच^{२} - खछ^{२} - गज^{२}$

(६) ० (७) ० (१०) ०

पारिभाषिक-शब्दावलि

आंगल—हिंदी

absurd असगत
according as तदनुसार
accuracy परिशुद्धता
addition योग, सकलन
adjustment व्यवस्थापन
algebraic बीजीय
aliter अन्यथा
alternately एकान्तर से
alternative विकल्प
anti logarithm प्रतिच्छेदा
apparatus साधित्र
arithmetical progression समान्तर श्रेढी
arithmetico geometrico-series समान्तर गुणोत्तर श्रेढी
arithmetic mean समान्तर मध्यक
arrangement arrange विन्यास करना
arow शर
article अनुच्छेद
ascending आरोही
assumption कल्पना
base आधार
binomial द्विपद
binomial coefficient द्विपद गुणक
binomial theorem द्विपद प्रमेय
bracket अभिवार
calculation परिगणन
cancel निरोपन, लोप करना
case प्रकार, दशा
change परिवर्तन
characteristic लक्षण
choice वरण, चुनाव
classification वर्गीकरण
coefficient गुणक
co factor सहगुणक
column स्तम्भ
columnwise स्तम्भानुसार
combination संचय

commensurable संमेय
committee समिति
common difference प्रचय
common factor समापवर्तक
common ratio साधारण निष्पत्ति
common system सामान्य पद्धति
complementary सपूरक
completely पूर्ण रूपेण
complex संकर
complex quantity संकर राशि
condition प्रतिबंध
conditional equation प्रतिबंधी समीकार
conjugate अनुबद्ध
conjugate quadratic surd अनुबद्ध वर्ग करणी
consecutive अनुगामी
constant अचल
constant term अचल पद
constituent संघटक
contain अन्तर्धारण
convergence अभिसार
convergent अभिसारी
corollary उपप्रमेय
correct शुद्ध
corresponding संवादी
cross multiplication तिर्यग् गुणन
cube root घन मूल
dash प्रास
decimal दशमिक
decimal fraction दशमिक भिन्न
definite परिमित
definition परिभाषा
degree of accuracy परिशुद्धता की मात्रा
delete अपमार्जन
denominator हर
denote अभिधान करना
dependent परतंत्र
descending अवरोही
determinant निश्चायक
development विकास
diagonal विकर्ण
diagonally opposite विकर्णतः सम्मुख
digit अंक
dimension विमा
direct multiplication प्रत्यक्ष गुणन
discriminant विवेचक
discussion पर्यालोचन
dissimilar असमरूप
divergence अपसार
divergent अपसारी
dividend भाज्य
eliminant निरसन फल

elimination निरसन
equality समता
equate समीकरण करना
equation समीकार
equidistant समदूर
equivalent समार्ई
even युग्म
evolution मूल क्रिया
exactly सुतथ्यत
exactness सुतथ्यता
expansion विस्तार
exponential equation घात समीकार
exponential series घाताक श्रढी
express व्यक्त करना
expression व्यजक, पदसहति
extraction of a root वर्गमूल निस्सारण
factor खण्ड
factorial हत *

finite परिमित
finite quantity परिमित राशि
finite series सान्त श्रढी
form रूप
formula सूत्र
fraction भिन्न
fractional भिन्नीय
function श्रित**
fundamental मूलभूत
generally सामान्यत
general term सामान्य पद
geometrical progression गुणोत्तर श्रढी
geometric mean गुणोत्तर मध्यक
greatest महत्तम
group समूह
harmonical prgoression हरात्मक श्रेढी
harmonic mean हरात्मक मध्यक

---

* The 'product of all the integers in serial order from one onwards

** A quantity which takes on a definite value, or values when special values are assigned to certain other quantities called the argument or independent variables of the function This term is used mostly to point out *dependence* on some certain variable or variables Mathematics Dictionary by G James and R C. James 'dependent from root श्रि to depend on from which the noun आश्रय is well known

homogeneous समानघात

homogeneous equation समानघात समीकार

homogeneous function समानघात फ्रित

hypotenuse कर्ण (ancient word)

hypothesis उपकल्पना

identical सर्वांग सम

identity ऐकात्म्य

illustrative निदर्शनात्मक

imaginary काल्पनिक

imaginary part काल्पनिक घटक

incommensurable असमेय

incommensurability असंमेयता

increase वर्धन

indefinite अपरिमित, अनियत

independent स्वतन्त्र

index घाताक*

infinite अनन्त

infinite series अनन्त श्रेढी

, अनन्ती

निवेशन

instructive बोधात्मक

in the limit सीमा में, सीमान्ती

integral अनुकल, पूर्णांक

integral part पूर्णांश भाग, अनुकल भाग

interchange व्यतिहरण, व्यतिहार

interpretation निर्वचन

inverse व्युत्क्रम

investigation अनुसन्धान

involution घात क्रिया

irrational अपरिमेय

kind प्रकार

known ज्ञात

last term अन्त पद

law नियम

laws of indices घाताक नियम

leading constituent अग्र सघटक

leading diagonal अग्र विकर्ण

left hand side वामपक्ष

like सजातीय समरूप

limit सीमा

linear रैखीय, एकघात

linear equation रैखीय समीकार

logarithm छेदा

logarithmic series छेदा श्रेढी

magnitude महत्ता

---

* The figure letter or expression अक showing the power घात of a quantity

mantissa दशमिकांश *
mathematical induction गणितीय अनुमान
mean मध्यक
mean difference मध्यमान्तर
middle term मध्य पद
minor उप निश्चायक * *
minus वियुत
modulus मापांक
monomial एक पद
multiple अपवर्त्य (प्राचीन शब्द)
natural number प्राकृतिक संख्या
natural logarithm प्राकृतिक छेदा
negligible उपेक्ष, नगण्य
non recurring अनावर्ती
note आलोक, टिप्पणी
notation संकेतना
number संख्या
numerical संख्यात्मक
numerically संख्या की दृष्टि से
observation अवलोकन
odd अयुग्म
order अनुक्रम, क्रम, वर्ण
pair युग्म
part घटक
partial product आंशिक गुणन-फल
partly अंशतः
permutation क्रमचय
polynomial बहुपद
power घात
preceding पूर्वगामी
prismatic colours प्राश्विक वर्ण
process विधा
progression श्रेढी
proof उपपत्ति
proper fraction लघ्वंश भिन्न
proportional अनुपाती
proposition साध्य
prove उपपादन करना
quadratic वर्गीय, द्विघात
quadratic equation द्विघात समीकार
quadratic expression द्विघात पदसंहति
quadratic function द्विघात श्रित
quadratic surd द्विघात करणी

---

* decimal दशमिक part अंश of a logarithm hence दशमिकांश

** minor determinant

quantity राशि
quotient लब्धि, भागफल
radical मूल
radical sign मूल चिह्न
ratio निष्पत्ति
rational परिमेय
rationalisation परिमेयकरण
rationalise परिमेय करना
rationalising factor परिमेय कारक खण्ड
real वास्तविक
real part वास्तविक घटक
rearrangement पुनर्विन्यास
reciprocal व्युत्क्रम
reciprocal equation व्युत्क्रम समीकार
recurring decimal आवर्त दशमिक
reduction प्रह्रासन
reference अभ्युद्देश
repeat पुनरावृत्तिकरण
represent प्रतिनिधान करना
required अपेक्षित, इष्ट
respectively क्रमश
rest विश्राम
restricted निबद्ध
restriction निबंध
reverse order उत्क्रम
right hand side दक्षिण पक्ष
root मूल
row पंक्ति
rule of cross multiplication तिर्यग गुणन का नियम
same order समवर्ण
satisfy समाधान करना
selection प्रवरण, चुनाव
separately पृथक्‌श
series श्रेढी
set कुलक
side पक्ष
signal संज्ञप्ति
significant सार्थक
similar समरूप
simplify सरल करना
simultaneous equation युगपत समीकार
solution साधन
solve साधन करना
square वर्ग करना
stage प्रक्रम
standard प्रमाप
statement आवेदन
station स्थान (प्राचीन शब्द)
substitution आदेश
subtraction वियोग
succession पूर्वानुपरता
successive पूर्वानुपर
sufficient पर्याप्त
suffix पादाक
summation योग करण

suppress निग्रहण करना
surd करणी
symbol प्रतीक
symmetry सममिति
symmetrical equation सममितीय समीकार
symmetrical function सममितीय फ़लन
table सारणी
tedious दीर्घसूत्री
telegraph apparatus दूरलिपि सामित्र
tend to प्रवृत्त
term पद
theorem प्रमेय
transformation रूपान्तरण
transposition पक्षान्तरण
trinomial त्रिपद
type प्ररूप
unknown अज्ञात
unlike विजातीय
up to infinity यावदनन्त
value मान
vanish लोप होना
variable चल
verification सत्यापन
verify सत्यापन करना
very small अल्पतर

Notations

^nP_r सक्रन

^nC_r सचन

$\lfloor n$ न

(factorial n) (क्रम न)

$\sum$ य

e (base of natural logarithm) या [प्राकृतिक लघुगणक का आधार]

i [$\sqrt{-1}$] या [$\sqrt{-१}$]

Lt सी

$n \to \infty$ न $\to \infty$

ω (cube root of unity)

ओ (एक का घन मूल)

S (for sum) यो [योग]

पारिभाषिक-शब्दावलि

हिन्दी—आंग्ल

अंश numerator
अंशतः partly
अग्र विकर्ण leading diagonal
अग्र संघटक leading constituent
अचर constant
अज्ञात unknown
अत्यल्प very small
अनन्त infinite
अनन्त श्रेढी infinite series
अनन्ती infinity
अनावर्त non recurring
अनुकल integral
अनुकल भाग integral part
अनुक्रम order
अनुगामी consecutive
अनुच्छेद article
अनुपाती proportional
अनुबद्ध conjugate
अनुबद्ध वर्ग करणी conjugate quadratic surd
अनुसंधान investigation
अन्त पद last term
अन्तर difference
अन्तर्धारण contain
अन्यथा aliter
अपरिमेय irrational
अपवर्त्य multiple
अपसार divergence
अपसारी divergent
अपेक्षित required
अभिधान करना to denote
अभिचार brackets
अभिसार convergence
अभिसारी convergent
अभ्युद्देश reference
अयुग्म odd
अर्हा value
अवरोही descending
अवलोकन observation
अव्यक्त unknown
असंगत absurd
असमरूप unlike, dissimilar

असमेय incommensurable
असमेयता incommensurability
असीम without limit
आंशिक गुणनफल partial product
आदेश substitution
आरोही ascending
आलोक note
आवर्त दशमिक recurring decimal
आवर्त होना to recur
आवेदन statement
उत्क्रम reverse order
उपकल्पना hypothesis
उपनिश्चायक minor
उपपत्ति proof
उपपादन करना prove
उपप्रमेय corollary
उपेक्ष्य negligible
एकघात linear
एकपद monomial
एकान्तर में alternately
एकैकश separately
ऐकात्म्य identity
करणी surd
कल्पना assumption
काल्पनिक घटक imaginary part
काल्पनिक राशि imaginary quantity
कुलक set
क्रम order
क्रमचय permutation
क्रमश respectively
खण्ड factor
गणितीय अनुमान mathematical induction
गुणक coefficient
गुणोत्तर मध्यक geometric mean
गुणोत्तर श्रेढी geometrical progression
घटक part
घात power
घात क्रिया involution
घात समीकार exponential equation
घातांक नियम laws of Indices
घातांक श्रेढी exponential series
चर variable
चुनाव selection
छेदा logarithm
छेदा श्रेढी logarithmic series
तत्काल immediately
तदनुसार according as
तिर्यग् गुणन का नियम rule of cross multiplication

त्रिपद trinomial
दक्षिण पक्ष right hand side
दशमिक decimal
दशमिक भिन्न decimal fraction
दशमिकांश mantissa
दीर्घ सूत्री tedious
दूरलिपि साधित्र telegraph apparatus
द्विघात quadratic
द्विघात पदसंहति quadratic expression
द्विघात श्रित quadratic function
द्विघात समीकरण quadratic equation
द्विपद binomial
द्विपद गुणक binomial coefficient
द्विपद प्रमेय binomial theorem
द्विपद विस्तार binomial expansion
नगण्य negligible
निरुद्ध restricted
निर्बंध restriction
निरसन elimination
निर्वचन interpretation
निवेश insertion
निर्धारक determinant
निष्पत्ति ratio

पक्ष side
पक्षान्तरण transposition
पंक्ति row
पद term
पदसंहति expression
परतंत्र dependent
परिगणन calculation
परिभाषा definition
परिमित राशि finite quantity
परिमेय rational
परिमेयकरण rationalisation
परिमेय करना rationalise
परिमेय कारक खण्ड rationalising factor
परिवर्तन change
परिशुद्धता accuracy
पर्याप्त sufficient
पान्तर suffix
पुनरावृत्त repeated
पुनर्विन्यास rearrangement
पूर्वगामी preceding
पूर्णांक integral
पूर्वानुपर successive
पूर्वानुपरता succession
प्रक्रम stage
प्रचय common difference
प्रतिच्छेदन antilogarithm
प्रतिनिधान करना to represent
प्रतिबंध condition

प्रतिबंधी समीकार conditional equation
प्रतिस्थापन replacement
प्रतीक symbol
प्रत्यक्ष गुणन direct multiplication
प्रमाप standard
प्रमेय theorem
प्ररूप type
प्रवरण selection
प्रवृत्त tend to
प्रह्रासन reduction
प्राकृतिक छेदा natural logarithm
प्राकृतिक संख्या natural number
प्राग dash
फल result
बहुपद polynomial
बीजीय algebraic
बोधात्मक instructive
भाजन करना to divide
भाज्य dividend
भिन्न fraction
भिन्नीय fractional
मध्यक mean
मध्यमान्तर mean difference
मध्यपद middle term
महत्तम greatest
महत्ता magnitude
मापाक modulus
मूल root, radical
मूल क्रिया evolution
मूल चिह्न radical sign
मूल भूत fundamental
यष्टि yard
यावदनन्त up to infinity
युगपत समीकार simultaneous equation
युग्म even, pair
योग addition
योग करण summation
योग करना to sum
राशि quantity
रूपान्तरण transformation
रेखीय linear
रेखीय समीकार linear equation
लक्षण characteristic
लघ्वंश भिन्न proper fraction
लब्धि quotient
लोप करना to cancel
लोप होना vanish
वर्ग square
वर्ग मूल निस्सारण extraction of a root
वर्गीकरण classification
वर्गीय quadratic
वर्ण order
वर्धन increase
वामपक्ष left hand side

वास्तविक घटक real part
विकर्ण diagonal
विकल्प alternative
विजातीय unlike
विधा process
विन्यस्त करना to arrange
विन्यास arrangement
वियुत minus
वियोग subtraction
विवेचक discriminant
व्यक्त करना express
व्यंजक expression
व्यतिहरण interchange
व्यवस्थापन adjustment
व्युत्क्रम reciprocal
व्युत्क्रम समीकार reciprocal equation
शर arrow
शुद्ध correct
श्रित function
श्रेढी progression series
संगामी corresponding
संकर complex
संकर राशि complex quantity
संकलन addition
संकेतना notation
संख्या number
संख्या की दृष्टि से numerically
संख्यात्मक numerical
संघटक constituent
संचय combination
संज्ञप्ति signal
सत्यापन verification
सत्यापन करना verify
समता equality
समदूर equidistant
समवर्ण same order
समाधान करना to satisfy
समान घात homogeneous
समानघात समीकार homogeneous equation
समानघात श्रित homogeneous function
समान्तर मध्यक arithmetic mean
समान्तर श्रेढी arithmetical progression
समान्तर गुणोत्तर श्रेढी arithmeticogeometric progression
समापवर्तक common factor
समार्ह equivalent
समिति committee
समीकरण equate
समीकार equation
समूह group
सम्पूरक complementary
सममिति symmetry
सममितीय symmetrical
सममितीय श्रित symmetrical function

सममितीय समीकार symmetrical equation
संमेय commensurable
सरल करना to simplify
सर्वांग सम identical
सहगुणक cofactor
साक्षेत्रिक वर्ण prismatic colours
साधन solution
साधन करना to solve
साधारण निष्पत्ति common ratio
साध्य proposition
सान्त श्रेढी finite series
सामान्यत generally
सामान्य पद general term
सामान्य पद्धति common system
सारणी table
सार्थक significant
सीमा limit
सीमान्तो in the limit
सीमा में in the limit
सुतथ्यत exactly, exactness
सूत्र formula
स्तम्भ column
स्तम्भानुसार columnwise
स्वतन्त्र independent
हत factorial
हर denominator
हरात्मक मध्यक harmonic mean
हरात्मक श्रेढी harmonical progression

छेदा-प्रतिछेदा-सारणियां

छेदा सारणी (logarithmic tables)

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१	२	३	४	५	६	७	८	९
५०	६९९०	६९९८	७००७	७०१६	७०२४	७०३३	७०४२	७०५०	७०५९	७०६७	१	२	३	३	४	५	६	७	८
५१	७०७६	७०८४	७०९३	७१०१	७११०	७११८	७१२६	७१३५	७१४३	७१५२	१	२	३	३	४	५	६	७	८
५२	७१६०	७१६८	७१७७	७१८५	७१९३	७२०२	७२१०	७२१८	७२२६	७२३५	१	२	२	३	४	५	६	७	७
५३	७२४३	७२५१	७२५९	७२६७	७२७५	७२८४	७२९२	७३००	७३०८	७३१६	१	२	२	३	४	५	६	६	७
५४	७३२४	७३३२	७३४०	७३४८	७३५६	७३६४	७३७२	७३८०	७३८८	७३९६	१	२	२	३	४	५	६	६	७
५५	७४०४	७४१२	७४१९	७४२७	७४३५	७४४३	७४५१	७४५९	७४६६	७४७४	१	२	२	३	४	५	५	६	७
५६	७४८२	७४९०	७४९७	७५०५	७५१३	७५२०	७५२८	७५३६	७५४३	७५५१	१	२	२	३	४	५	५	६	७
५७	७५५९	७५६६	७५७४	७५८२	७५८९	७५९७	७६०४	७६१२	७६१९	७६२७	१	२	२	३	४	५	५	६	७
५८	७६३४	७६४२	७६४९	७६५७	७६६४	७६७२	७६७९	७६८६	७६९४	७७०१	१	१	२	३	४	४	५	६	७
५९	७७०९	७७१६	७७२३	७७३१	७७३८	७७४५	७७५२	७७६०	७७६७	७७७४	१	१	२	३	४	४	५	६	७
६०	७७८२	७७८९	७७९६	७८०३	७८१०	७८१८	७८२५	७८३२	७८३९	७८४६	१	१	२	३	४	४	५	६	६
६१	७८५३	७८६०	७८६८	७८७५	७८८२	७८८९	७८९६	७९०३	७९१०	७९१७	१	१	२	३	४	४	५	६	६
६२	७९२४	७९३१	७९३८	७९४५	७९५२	७९५९	७९६६	७९७३	७९८०	७९८७	१	१	२	३	३	४	५	६	६
६३	७९९३	८०००	८००७	८०१४	८०२१	८०२८	८०३५	८०४१	८०४८	८०५५	१	१	२	३	३	४	५	५	६
६४	८०६२	८०६९	८०७५	८०८२	८०८९	८०९६	८१०२	८१०९	८११६	८१२२	१	१	२	३	३	४	५	५	६
६५	८१२९	८१३६	८१४२	८१४९	८१५६	८१६२	८१६९	८१७६	८१८२	८१८९	१	१	२	३	३	४	५	५	६
६६	८१९५	८२०२	८२०९	८२१५	८२२२	८२२८	८२३५	८२४१	८२४८	८२५४	१	१	२	३	३	४	५	५	६
६७	८२६१	८२६७	८२७४	८२८०	८२८७	८२९३	८२९९	८३०६	८३१२	८३१९	१	१	२	३	३	४	५	५	६
६८	८३२५	८३३१	८३३८	८३४४	८३५१	८३५७	८३६३	८३७०	८३७६	८३८२	१	१	२	३	३	४	४	५	६
६९	८३८८	८३९५	८४०१	८४०७	८४१४	८४२०	८४२६	८४३२	८४३९	८४४५	१	१	२	२	३	४	४	५	६
७०	८४५१	८४५७	८४६३	८४७०	८४७६	८४८२	८४८८	८४९४	८५००	८५०६	१	१	२	२	३	४	४	५	६
७१	८५१३	८५१९	८५२५	८५३१	८५३७	८५४३	८५४९	८५५५	८५६१	८५६७	१	१	२	२	३	४	४	५	५
७२	८५७३	८५७९	८५८५	८५९१	८५९७	८६०३	८६०९	८६१५	८६२१	८६२७	१	१	२	२	३	४	४	५	५
७३	८६३३	८६३९	८६४५	८६५१	८६५७	८६६३	८६६९	८६७५	८६८१	८६८६	१	१	२	२	३	४	४	५	५
७४	८६९२	८६९८	८७०४	८७१०	८७१६	८७२२	८७२७	८७३३	८७३९	८७४५	१	१	२	२	३	४	४	५	५

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१२३	४५६	७८९
७५	८७५१	८७५६	८७६२	८७६८	८७७४	८७७९	८७८५	८७९१	८७९७	८८०२	११२	२३३	४५५
७६	८८०८	८८१४	८८२०	८८२५	८८३१	८८३७	८८४२	८८४८	८८५४	८८५९	११२	२३३	४५५
७७	८८६५	८८७१	८८७६	८८८२	८८८७	८८९३	८८९९	८९०४	८९१०	८९१५	११२	२३३	४५५
७८	८९२१	८९२७	८९३२	८९३८	८९४३	८९४९	८९५४	८९६०	८९६५	८९७१	११२	२३३	४४५
७९	८९७६	८९८२	८९८७	८९९३	८९९८	९००४	९००९	९०१५	९०२०	९०२५	११२	२३३	४४५
८०	९०३१	९०३६	९०४२	९०४७	९०५३	९०५८	९०६३	९०६९	९०७४	९०७९	११२	२३३	४४५
८१	९०८५	९०९०	९०९६	९१०१	९१०६	९११२	९११७	९१२२	९१२८	९१३३	११२	२३३	४४५
८२	९१३८	९१४३	९१४९	९१५४	९१५९	९१६५	९१७०	९१७५	९१८०	९१८६	११२	२३३	४४५
८३	९१९१	९१९६	९२०१	९२०६	९२१२	९२१७	९२२२	९२२७	९२३२	९२३८	११२	२३३	४४५
८४	९२४३	९२४८	९२५३	९२५८	९२६३	९२६९	९२७४	९२७९	९२८४	९२८९	११२	२३३	४४५
८५	९२९४	९२९९	९३०४	९३०९	९३१५	९३२०	९३२५	९३३०	९३३५	९३४०	११२	२३३	४४५
८६	९३४५	९३५०	९३५५	९३६०	९३६५	९३७०	९३७५	९३८०	९३८५	९३९०	११२	२३३	४४५
८७	९३९५	९४००	९४०५	९४१०	९४१५	९४२०	९४२५	९४३०	९४३५	९४४०	०११	२२३	३४४
८८	९४४५	९४५०	९४५५	९४६०	९४६५	९४६९	९४७४	९४७९	९४८४	९४८९	०११	२२३	३४४
८९	९४९४	९४९९	९५०४	९५०९	९५१३	९५१८	९५२३	९५२८	९५३३	९५३८	०११	२२३	३४४
९०	९५४२	९५४७	९५५२	९५५७	९५६२	९५६६	९५७१	९५७६	९५८१	९५८६	०११	२२३	३४४
९१	९५९०	९५९५	९६००	९६०५	९६०९	९६१४	९६१९	९६२४	९६२८	९६३३	०११	२२३	३४४
९२	९६३८	९६४३	९६४७	९६५२	९६५७	९६६१	९६६६	९६७१	९६७५	९६८०	०११	२२३	३४४
९३	९६८५	९६८९	९६९४	९६९९	९७०३	९७०८	९७१३	९७१७	९७२२	९७२७	०११	२२३	३४४
९४	९७३१	९७३६	९७४१	९७४५	९७५०	९७५४	९७५९	९७६३	९७६८	९७७३	०११	२२३	३४४
९५	९७७७	९७८२	९७८६	९७९१	९७९५	९८००	९८०५	९८०९	९८१४	९८१८	०११	२२३	३४४
९६	९८२३	९८२७	९८३२	९८३६	९८४१	९८४५	९८५०	९८५४	९८५९	९८६३	०११	२२३	३४४
९७	९८६८	९८७२	९८७७	९८८१	९८८६	९८९०	९८९४	९८९९	९९०३	९९०८	०११	२२३	३४४
९८	९९१२	९९१७	९९२१	९९२६	९९३०	९९३४	९९३९	९९४३	९९४८	९९५२	०११	२२३	३४४
९९	९९५६	९९६१	९९६५	९९६९	९९७४	९९७८	९९८३	९९८७	९९९१	९९९६	०११	२२३	३३४

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१२३	४५६	७८९
.२५	१७७८	१७८२	१७८६	१७९१	१७९५	१७९९	१८०३	१८०७	१८११	१८१६	० १ १	२ २ २	३ ३ ४
.२६	१८२०	१८२४	१८२८	१८३२	१८३७	१८४१	१८४५	१८४९	१८५४	१८५८	० १ १	२ २ ३	३ ३ ४
.२७	१८६२	१८६६	१८७१	१८७५	१८७९	१८८४	१८८८	१८९२	१८९७	१९०१	० १ १	२ २ ३	३ ३ ४
.२८	१९०५	१९१०	१९१४	१९१९	१९२३	१९२८	१९३२	१९३६	१९४१	१९४५	० १ १	२ २ ३	३ ४ ४
.२९	१९५०	१९५४	१९५९	१९६३	१९६८	१९७२	१९७७	१९८२	१९८६	१९९१	० १ १	२ २ ३	३ ४ ४
.३०	१९९५	२०००	२००४	२००९	२०१४	२०१८	२०२३	२०२८	२०३२	२०३७	० १ १	२ २ ३	३ ४ ४
.३१	२०४२	२०४६	२०५१	२०५६	२०६१	२०६५	२०७०	२०७५	२०८०	२०८४	० १ १	२ २ ३	३ ४ ४
.३२	२०८९	२०९४	२०९९	२१०४	२१०९	२११३	२११८	२१२३	२१२८	२१३३	० १ १	२ २ ३	३ ४ ४
.३३	२१३८	२१४३	२१४८	२१५३	२१५८	२१६३	२१६८	२१७३	२१७८	२१८३	० १ १	२ २ ३	३ ४ ४
.३४	२१८८	२१९३	२१९८	२२०३	२२०८	२२१३	२२१८	२२२३	२२२८	२२३४	१ १ २	२ ३ ३	४ ४ ५
.३५	२२३९	२२४४	२२४९	२२५४	२२५९	२२६५	२२७०	२२७५	२२८०	२२८६	१ १ २	२ ३ ३	४ ४ ५
.३६	२२९१	२२९६	२३०१	२३०७	२३१२	२३१७	२३२३	२३२८	२३३३	२३३९	१ १ २	२ ३ ३	४ ४ ५
.३७	२३४४	२३५०	२३५५	२३६०	२३६६	२३७१	२३७७	२३८२	२३८८	२३९३	१ १ २	२ ३ ३	४ ४ ५
.३८	२३९९	२४०४	२४१०	२४१५	२४२१	२४२७	२४३२	२४३८	२४४३	२४४९	१ १ २	२ ३ ३	४ ४ ५
.३९	२४५५	२४६०	२४६६	२४७२	२४७७	२४८३	२४८९	२४९५	२५००	२५०६	१ १ २	२ ३ ३	४ ५ ५
.४०	२५१२	२५१८	२५२३	२५२९	२५३५	२५४१	२५४७	२५५३	२५५९	२५६४	१ १ २	२ ३ ४	४ ५ ५
.४१	२५७०	२५७६	२५८२	२५८८	२५९४	२६००	२६०६	२६१२	२६१८	२६२४	१ १ २	२ ३ ४	४ ५ ५
.४२	२६३०	२६३६	२६४२	२६४९	२६५५	२६६१	२६६७	२६७३	२६७९	२६८५	१ १ २	२ ३ ४	४ ५ ६
.४३	२६९२	२६९८	२७०४	२७१०	२७१६	२७२३	२७२९	२७३५	२७४२	२७४८	१ १ २	३ ३ ४	४ ५ ६
.४४	२७५४	२७६१	२७६७	२७७३	२७८०	२७८६	२७९३	२७९९	२८०५	२८१२	१ १ २	३ ३ ४	४ ५ ६
.४५	२८१८	२८२५	२८३१	२८३८	२८४४	२८५१	२८५८	२८६४	२८७१	२८७७	१ १ २	३ ३ ४	५ ५ ६
.४६	२८८४	२८९१	२८९७	२९०४	२९११	२९१७	२९२४	२९३१	२९३८	२९४४	१ १ २	३ ३ ४	५ ५ ६
.४७	२९५१	२९५८	२९६५	२९७२	२९७९	२९८५	२९९२	२९९९	३००६	३०१३	१ १ २	३ ३ ४	५ ५ ६
.४८	३०२०	३०२७	३०३४	३०४१	३०४८	३०५५	३०६२	३०६९	३०७६	३०८३	१ १ २	३ ४ ४	५ ६ ६
.४९	३०९०	३०९७	३१०५	३११२	३११९	३१२६	३१३३	३१४१	३१४८	३१५५	१ १ २	३ ४ ४	५ ६ ६

शुद्धिपत्र

पृष्ठ संख्या	पंक्ति	अशुद्ध	शुद्ध
२१	१४	$(य_ट)^{ट+ठ}$	$\left[\frac{य^ट}{य^ठ}\right]^{ट+ठ}$
२२	३	$(य^ड)$	$(य^ड)^ट$
५९	८	$क = अ\left[\frac{अ}{आ}\right]^{\frac{त-१}{त-थ}}$	$क = अ\left[\frac{आ}{अ}\right]^{\frac{त-१}{त-थ}}$
७३	१३	से १ अधिक	से १ से अधिक
७५	९	से १ न्यून	से १ से न्यून
७८	१	$\frac{१}{१-\frac{२}{७}}$	$\frac{१}{१-\frac{१}{७}}$
८०	१२	द = तथयथ ..	द = तथयथ...
८०	१४	तथ × थथथ ..	तथ थथथ
८८	९	राशियों बीच	राशियों के बीच
१२८	८	$कय^२ + खक + ग = ०$	$कय^२ + खय + ग = ०$
१३१	३	अर्थात् $र \nless ३$	$र \ngtr ३$
१३६	६	$(कय + र + छ)$	$(कय + जर + छ)$
२३२	९	$^{स}च_{,र}\, य^{स-१}$	$^{स}च_{,र}\, य^{उ-१}$

पृष्ठ-संख्या	पंक्ति	अशुद्ध	शुद्ध
२३३	३	३य	२य
२३९	४	$^{स}त$	$^{स}च_{त-१}$
२४१	९	ट य पूर्णांक	ट घन पूर्णांक
२५१	२२	$^{स}च_{२}य^{२}(१+य^{२})^{२}$	$^{स}च_{२}य^{२}(१+य)^{२}$
२५९	५	$(-१)\ स$ $(स)^{२}$	$\frac{(-१)^{स}\ स}{(स/२)^{२}}$
२७०	१६	$स(स-१)_{य}$ १×२	$\frac{स(स-१)}{१\times२}य^{२}$
२८०	१६	$\frac{स\ (स-१)(स-२)}{१\times२\times३}.य$	$\frac{स(स-१)(स-२)}{१\times२\times३}य^{३}$
२८३	१०	$\left(+\frac{१}{१०^{२}}\right)^{.}$	$\left(-\frac{१}{१०^{२}}\right)$
२८३	१	$\left(+\frac{१}{१०^{२}}\right)^{२}$	$\left(-\frac{१}{१०^{२}}\right)^{२}$
२८९	६	$३य^{२}४+य^{३}$	$३य^{२}+४य^{३}$
३१५	१५	$\left(+\frac{१}{स}\right)^{स}$	$\left(१+\frac{१}{स}\right)^{स}$
३१२	३	$३(-१)^{न-१}$	$३(-१)^{न-१}$
३१९	४	$\underline{\vert न-१}$	$\underline{\vert न-२}$
३२५	१२	$\frac{(२य)^{२}}{३}$	$\frac{(२य)^{३}}{३}$